Упражнения по ЧДУ, II сем. 2007-2008 г.

Линейни ЧДУ

Петко Николов, Упражнения към лекциите по ЧДУ, ФЗ.Ф.

$u = u(x_1, x_2)$ – функция на две променливи

уравнение: $a_1(x_1, x_2)\, \partial_1 u + a_2(x_1, x_2)\, \partial_2 u = 0$

Задача на Коши:

Дадено: крива $\gamma = (x_1(t), x_2(t))$, $t \in \Delta$ - интервал

функция $u_0(t) = u_0(x_1(t), x_2(t))$ дефинирана върху γ ($u_0 : \gamma \to \mathbb{R}$). Да се намери решение $u = u(x_1, x_2)$, такова че: $u(x_1(t), x_2(t)) = u_0(x_1(t)\, x_2(t)) = u_0(t)$

Ако $\begin{vmatrix} a_1(x_1(t), x_2(t)) & \dot{x}_1(t) \\ a_2(x_1(t), x_2(t)) & \dot{x}_2(t) \end{vmatrix} \neq 0 \quad \forall t \in \Delta$

в околност на γ съществува единствено такова решение

Алгоритъм

1. Намираме общото решение на характеристичната система

$$\left| \begin{aligned} \dot{x}_1(s) &= a_1(x_1, x_2) \\ \dot{x}_2(s) &= a_2(x_1, x_2) \end{aligned} \right\} \Rightarrow \begin{aligned} x_1 &= x_1(s, \alpha_1, \alpha_2) \\ x_2 &= x_2(s, \alpha_1, \alpha_2) \end{aligned}$$

2. Налагаме началните условия при $s = 0$

$$\left| \begin{aligned} x_1(0, \alpha_1, \alpha_2) &= x_1(t) \\ x_2(0, \alpha_1, \alpha_2) &= x_2(t) \end{aligned} \right\} \begin{aligned} \alpha_1 &= \alpha_1(t) \\ \alpha_2 &= \alpha_2(t) \end{aligned} \Bigg\} \Rightarrow \begin{aligned} x_1 &= x_1(s, t) \\ x_2 &= x_2(s, t) \end{aligned}$$

3. Решаваме системата спрямо s и t

$$\left| \begin{aligned} x_1 &= x_1(s, t) \\ x_2 &= x_2(s, t) \end{aligned} \right\} \Rightarrow \begin{aligned} s &= s(x_1, x_2) \\ t &= t(x_1, x_2) \end{aligned}$$

4. $u(x_1, x_2) = u_0(t(x_1, x_2))$ е търсеното решение

Задача

Намерете решение $u = u(x_1, x_2)$ на уравнението $\partial_1 u + x_1 x_2\, \partial_2 u = 0$ удовлетворяващо условието на Коши $u(0, t) = t^2$, $t \in (-\infty, +\infty)$. (Тук $x_1(t) = 0$, $x_2(t) = t$, $u_0(t) = t^2$)

Решение

① $\begin{cases} \dot{x}_1(s) = 1 \quad \to x_1(s) = s + \alpha_1 \\ \dot{x}_2(s) = x_1 . x_2 \to \dot{x}_2(s) = (s+\alpha_1) . x_2 \to x_2(s) = \alpha_2 e^{(\frac{1}{2}s^2 + \alpha_1 s)} \end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases} x_1 = s + \alpha_1 \\ x_2 = \alpha_2 e^{(\frac{1}{2}s^2 + \alpha_1 s)} \end{cases}$

② при $s = 0$: $\left.\begin{cases} \alpha_1 = 0 \\ \alpha_2 = t \end{cases}\right\} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = s \\ x_2 = t e^{\frac{1}{2}s^2} \end{cases}$

③ $\left.\begin{cases} x_1 = s \\ x_2 = t e^{\frac{1}{2}s^2} \end{cases}\right\} \Rightarrow \begin{cases} s = x_1 \\ t = x_2 e^{-\frac{1}{2}x_1^2} \end{cases}$

④ $u(x_1, x_2) = u_0(t(x_1, x_2)) = \left(x_2 e^{-\frac{1}{2}x_1^2}\right)^2 = x_2^2 e^{-x_1^2}$

Решението съществува в цялата равнина $\mathbb{R}^2$

(Справка $\dot{x}(s) = f(s). x(s) \to x(s) = \alpha . e^{(\int f(s) ds)}$
при фиксиран един неопределен интеграл)

Задача

Намерете решение $u = u(x_1, x_2)$ на уравнението $x_2 \partial_1 u + x_1 \partial_2 u = 0$, удовлетворяващо усл. на Коши: $u(0, t) = \sin t$. Направете изследване. $\begin{cases} x_1(t) = 0 \\ x_2(t) = t \end{cases}$

Решение

① $\begin{cases} \dot{x}_1(s) = x_2 \\ \dot{x}_2(s) = x_1 \end{cases} \to \ddot{x}_1 = \dot{x}_2 = x_1 \to \begin{cases} x_1 = \alpha_1 e^{s} + \alpha_2 e^{-s} \\ x_2 = \alpha_1 e^{s} - \alpha_2 e^{-s} \end{cases}$

$\begin{vmatrix} a_1(x_1(t), x_2(t)) & \dot{x}_1(t) \\ a_2(x_1(t), x_2(t)) & \dot{x}_2(t) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} t & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = t$, трябва $t \neq 0$

два интервала $t < 0$ & $t > 0$

② $s = 0 \Rightarrow \left.\begin{cases} \alpha_1 + \alpha_2 = 0 \\ \alpha_1 - \alpha_2 = t \end{cases}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} \alpha_1 = \frac{1}{2}t \\ \alpha_2 = -\frac{1}{2}t \end{array}$

$\begin{cases} x_1 = t \dfrac{e^{s} - e^{-s}}{2} \\ x_2 = t \dfrac{e^{s} + e^{-s}}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = t \,\mathrm{sh}\, s \\ x_2 = t \,\mathrm{ch}\, s \end{cases}$

(3) $\begin{cases} x_1 = t\,\mathrm{sh}\,s \\ x_2 = t\,\mathrm{ch}\,s \end{cases} \longrightarrow x_2^2 - x_1^2 = t^2(\mathrm{ch}^2 s - \mathrm{sh}^2 s) = t^2$

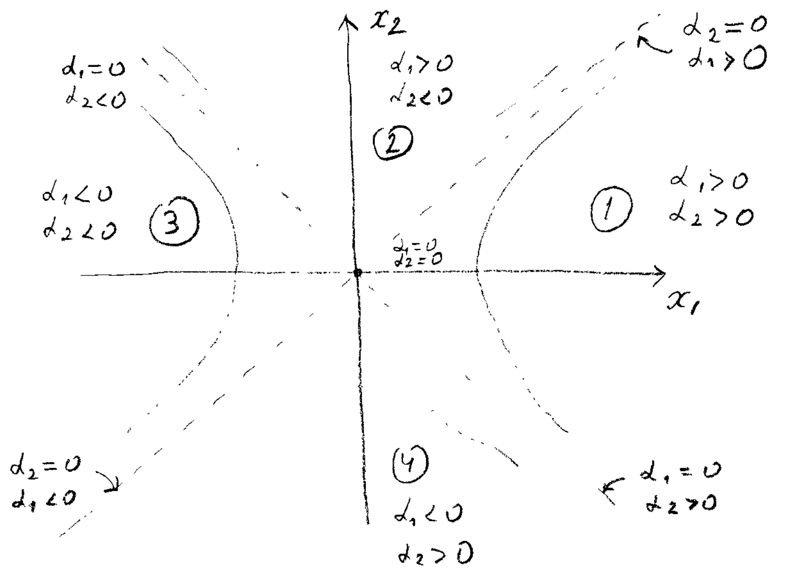
$t = \pm\sqrt{x_2^2 - x_1^2}$ $\qquad$ $+$ при $t \in (0, +\infty)$

$\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad$ $-$ при $t \in (-\infty, 0)$

(4) $u(x_1, x_2) = u_0(t(x_1, x_2)) = \sin\left(\pm\sqrt{x_2^2 - x_1^2}\right)$

Разположение на характеристиките в $\mathbb{R}^2$

$\begin{cases} x_1 = \alpha_1 e^{s} + \alpha_2 e^{-s} \\ x_2 = \alpha_1 e^{s} - \alpha_2 e^{-s} \end{cases} \longrightarrow x_1^2 - x_2^2 = 4\alpha_1\alpha_2 = \mathrm{const}$



$y_1 = \alpha_1 e^{s} + \alpha_2 e^{-s}$

$y_2 = \alpha_1 e^{s} - \alpha_2 e^{-s}$

$\begin{cases} \alpha_1 \cdot e^{0} + \alpha_2 e^{-0} = x_1 \\ \alpha_1 e^{0} - \alpha_2 e^{-0} = x_2 \end{cases}$

$\Rightarrow \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = A \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$

Лоренцово преобразувание

В нашия случай $\alpha_1 \cdot \alpha_2 = -\frac{1}{4}t^2$. при $t \in (0, \infty) \to \begin{cases} \alpha_1 > 0 \\ \alpha_2 < 0 \end{cases}$

решението е дефинирано в областта (2) и кривата на Коши е $\{(0,t) \mid t \in (0,\infty)\}$

При $t \in (-\infty, 0)$ кривата на Коши е $\{(0,t) \mid t \in (-\infty, 0)\}$

$\alpha_1 < 0$ и $\alpha_2 > 0$, решението е дефинирано в областта (4)

В следващите задачи няма да правим такива изследвания

<u>Обобщение за n променливи</u>

$u = u(x_1, x_2, \dots, x_n)$. Уравнение

$$\sum_{i=1}^{n} a_i(x_1, \dots, x_n)\, \partial_i u(x_1, \dots, x_n) = 0$$

Задача на Коши

Зададена е хиперповърхност $S \subset \mathbb{R}^n$, $\dim(S) = n-1$

Параметризация на S: $\left|\begin{array}{l} x_1 = x_1(t_1,\dots,t_{n-1}) \\ \vdots \\ x_n = x_n(t_1,\dots,t_{n-1}) \end{array}\right\} (t_1,\dots,t_{n-1}) \in V \subset \mathbb{R}^{n-1}$ област

Кратък запис $\vec{x}(\vec{t})$, $\vec{t} \in V \subset \mathbb{R}^{n-1}$; $\vec{x}(\vec{t}) \in \mathbb{R}^n$

Функция $u_0 : S \to \mathbb{R}$, $u_0(\vec{t}) = u_0(x_1(\vec{t}),\dots,x_n(\vec{t}))$

Да се намери решение $u = u(\vec{x})$ такова, че

$u|_S = u_0 \quad \big(u(x_1(t_1,\dots,t_{n-1}),\dots,x_n(t_1,\dots,t_{n-1})) = u_0(t_1,\dots,t_{n-1}) \big)$

<u>Алгоритъм</u>

(1) Намиране общото решение на характеристичната система

$$\left|\begin{array}{l} \dot{x}_1(s) = a_1(x_1,\dots,x_n) \\ \vdots \\ \dot{x}_n(s) = a_n(x_1,\dots,x_n) \end{array}\right\} \Rightarrow \left|\begin{array}{l} x_1 = x_1(s,\alpha_1,\dots,\alpha_n) \\ \vdots \\ x_n = x_n(s,\alpha_1,\dots,\alpha_n) \end{array}\right.$$

(2) Налагане началните условия при $s = 0$

$$\left|\begin{array}{l} x_1(0,\alpha_1,\dots,\alpha_n) = x_1(t_1,\dots,t_{n-1}) \\ \vdots \\ x_n(0,\alpha_1,\dots,\alpha_n) = x_n(t_1,\dots,t_{n-1}) \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} \alpha_1 = \alpha_1(\vec{t}) \\ \vdots \\ \alpha_n = \alpha_1(\vec{t}) \end{array} \Rightarrow$$

$$\left|\begin{array}{l} x_1 = x_1(s,\vec{t}) \\ \vdots \\ x_n = x_n(s,\vec{t}) \end{array}\right. ; \quad \vec{t} = (t_1,\dots,t_{n-1})$$

(3) Решаване системата

$$\left|\begin{array}{l} x_1 = x_1(s,t_1,\dots,t_{n-1}) \\ \vdots \\ x_n = x_n(s,t_1,\dots,t_{n-1}) \end{array}\right\} \Rightarrow \left|\begin{array}{ll} s = s(x_1,\dots,x_n) & = s(\vec{x}) \\ t_1 = t_1(x_1,\dots,x_n) & = t_1(\vec{x}) \\ \vdots & \\ t_{n-1} = t_{n-1}(x_1,\dots,x_n) & = t_{n-1}(\vec{x}) \end{array}\right.$$

(4) $u_0(\vec{x}) = u_0(t_1(\vec{x}),\dots,t_{n-1}(\vec{x}))$

<u>Задачата</u> на Коши <u>има</u> <u>единствено</u> <u>решение</u> в околност на $S \subset \mathbb{R}^n$ ако е изпълнено

$$\begin{vmatrix} a_1(\vec{x}(\vec{t})) & \partial_{t_1} x_1(\vec{t}) & \dots & \partial_{t_{n-1}} x_1(\vec{t}) \\ & & & \\ a_n(\vec{x}(\vec{t})) & \partial_{t_1} x_n(\vec{t}) & & \partial_{t_{n-1}} x_n(\vec{t}) \end{vmatrix} \neq 0, \quad \forall \vec{t} \in V \subset \mathbb{R}^n$$

$\left[\begin{array}{l} S \subset \mathbb{R}^n,\ \dim S = n-1,\ u_0 : S \to \mathbb{R} \\ u|_S = u_0 \end{array}\right.$

Задача

Намерете решение $u = u(x_1, \dots, x_3)$ на уравнението $(x_1 + x_2)\partial_1 u + x_2 \partial_2 u + x_3^2 \partial_3 u = 0$, удовлетворяващо условието на Коши: $u(t_1, t_2, 1) = \dfrac{t_1}{t_2}$

Решение

(1) $$\left|\begin{array}{l} \dot x_1 = x_1 + x_2 \longrightarrow \dot x_1 = x_1 + \alpha_2 e^s \\ \dot x_2 = x_2 \longrightarrow x_2 = \alpha_2 e^s \\ \dot x_3 = x_3^2 \end{array}\right.$$

$\dot x_1 - x_1 = \alpha_2 e^s$ - линейно нехомогенно ур.

частно решение : $\alpha_2 s e^s$

общо решение на хом. уравнение $\dot x_1 - x_1 = 0 \to \alpha_1 e^s$

$\Rightarrow$ Общо решение $x_1(s) = \alpha_1 e^s + \alpha_2 s e^s$

$$\frac{dx_3}{ds} = x_3^2 \Rightarrow \frac{dx_3}{x_3^2} = ds \Rightarrow -\frac{1}{x_3} = s + \alpha_3 \Rightarrow x_3 = \frac{-1}{s + \alpha_3}$$

$$\left|\begin{array}{l} x_1 = \alpha_1 e^s + \alpha_2 s e^s \\ x_2 = \alpha_2 e^s \\ x_3 = \dfrac{-1}{s + \alpha_3} \end{array}\right. \qquad \left\{\begin{array}{l} x_1(t_1, t_2) = t_1 \\ x_2(t_1, t_2) = t_2 \\ x_3(t_1, t_2) = 1 \end{array}\right.$$

(2) $$s = 0 \Rightarrow \left.\left|\begin{array}{l} \alpha_1 = t_1 \\ \alpha_2 = t_2 \\ -\dfrac{1}{\alpha_3} = 1 \to \alpha_3 = -1 \end{array}\right.\right\} \Rightarrow \left|\begin{array}{l} x_1 = t_1 e^s + t_2 s e^s \\ x_2 = t_2 e^s \\ x_3 = \dfrac{1}{1-s} \end{array}\right.$$

(3) Решаваме системата спрямо s, t_1, t_2

$$\left|\begin{array}{l} x_1 = t_1 e^s + t_2 s e^s \\ x_2 = t_2 e^s \\ x_3 = \dfrac{1}{1-s} \end{array}\right. \qquad 1 - s = \frac{1}{x_3} \to s = \frac{x_3 - 1}{x_3}$$

$$t_2 = x_2 \cdot e^{\frac{1 - x_3}{x_3}}$$

$$x_1 = t_1 e^{\frac{x_3 - 1}{x_3}} + x_2 \cancel{e^{\frac{1 - x_3}{x_3}}} \cdot \frac{x_3 - 1}{x_3} \cdot \cancel{e^{\frac{x_3 - 1}{x_3}}}$$

$$x_1 = t_1 e^{\frac{x_3 - 1}{x_3}} + x_2 \frac{x_3 - 1}{x_3} \Rightarrow t_1 = \left(x_1 - x_2 \frac{x_3 - 1}{x_3}\right) \cdot e^{\frac{1 - x_3}{x_3}}$$

(4) $u(x_1, x_2, x_3) = u_0(t_1(\bar{x}'), t_2(\bar{x}')) = \dfrac{t_1(\bar{x}')}{t_2(\bar{x}')} =$

$$= \left(x_1 + x_2 \frac{1-x_3}{x_3}\right) e^{\frac{1-x_3}{x_3}} \Big/ x_2 \cdot e^{\frac{1-x_3}{x_3}} = \frac{x_1}{x_2} + \frac{1-x_3}{x_3}$$

Коментар

При ЧДУ (I ред) за функция на n променливи условието на Коши е върху подмногообразие $S \subset \mathbb{R}^n$ с размерност $n-1$. При 2 променливи, това крива $\gamma \in \mathbb{R}^2$. При една променлива условието на Коши е върху точка. "подмногообразие в $\mathbb{R}^1$ с размерност $1-1=0$" Функция зададена върху подмногообразие $S \subset \mathbb{R}^n$, $\dim(S) = n-1$ се интерпретира еднозначно в околност на S ако се иска продължението функция да е решение на фиксирано ЧДУ от I ред.

Поведение при смяна на променливите

Нека $\sum_{i=1}^{n} a_i(x)\, \partial_i u(x) = 0$ е лин. уравнение

$$\left| \begin{array}{l} x_1' = x_1'(x_1, \dots, x_n) \\ \vdots \\ x_n' = x_n'(x_1, \dots, x_n) \end{array} \right. \qquad \frac{D(x_1', \dots, x_n')}{D(x_1, \dots, x_n)} \neq 0$$

смяна на променливите.

$x' = x'(x)$ и $x = x(x')$ кратък запис

$$\left.\begin{array}{l} u'(x') = u(x(x')) \\ u(x) = u'(x'(x)) \end{array}\right\} \quad u'(x') = u(x)$$

или x изразено чрез x' или x' е изразено чрез x

$$\Rightarrow \frac{\partial u}{\partial x_i}(x) = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial u'}{\partial x_k'}(x'(x)) \frac{\partial x_k'}{\partial x_i}(x) \longrightarrow \text{заместване}$$

$$\sum_{i=1}^{n} a_i(x) \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial u'}{\partial x_k'}(x'(x)) \frac{\partial x_k'}{\partial x_i}(x) = 0$$

$$\sum_{k=1}^{n} \left(\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial x'_k}{\partial x_i}(x)\, a_i(x) \right) \frac{\partial u'}{\partial x'_k}(x'(x)) = 0$$

$$\Rightarrow \sum_{k=1}^{n} a'_k(x') \frac{\partial u'}{\partial x'_k}(x') = 0 \quad ; \quad a'_k(x') = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial x'_k}{\partial x_i}(x)\, a_i(x)$$

В дясното се подразбира, че $x = x(x')$

$a_i(x)$ се трансформира като векторно поле

Характеристичната система за новото уравнение е

$$\begin{cases} \dot{x}'_1 = a'_1(x'_1, \dots, x'_n) \\ \vdots \\ \dot{x}'_n = a'_n(x'_1, \dots, x'_n) \end{cases}$$

при система ОДУ

$$\dot{x}_1 = a_1(x_1 \dots x_n)$$
$$\vdots$$
$$\dot{x}_n = a_n(x_1 \dots x_n)$$

дясната страна се трансформира като компонент на векторно поле.. Линейно ЧДУ описва и се описва от едно векторно поле с компоненти $(a_1(x), \dots, a_n(x))$

Задача

При решаване задачата на Коши получаваме взаимно еднозначно изображение: $(x_1, \dots, x_n) \leftrightarrow (s, t_1 \dots t_{n-1})$

Можем да считаме, че $(s, t_1, \dots, t_n)$ са нови променливи

Как изглежда линейното ЧДУ в тези променливи?

То изобщо има вида

$$a'_0(s, \vec{t}) \frac{\partial u'}{\partial s}(s, \vec{t}) + \sum_{j=1}^{n-1} a'_j(s, \vec{t}) \frac{\partial u'}{\partial t_j}(s, \vec{t}) = 0$$

Но сега

$$1 = \frac{\partial s}{\partial s} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial s}{\partial x_i}(\vec{x}) \frac{\partial x_i}{\partial s}(s, \vec{t}) =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial s}{\partial x_i}(\vec{x}(s, \vec{t})) \cdot a_i(\vec{x}(s, t)) = a'_0(s, \vec{t}) = 1$$

$$0 = \frac{\partial t_j}{\partial s} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial t_j}{\partial x_i}(\vec{x}(s, \vec{t})) \cdot a_i(x(s, t)) = a'_j(s, t) = 0, \quad j = 1, 2, \dots n-1$$

$\Rightarrow$ Уравнението има вида $\frac{\partial}{\partial s} U(s, t_1 \dots t_{n-1}) = 0$

Т.е. За всяко векторно поле (ковариантно) $(a_i(x))$ в околност на некритична точка $(\vec{a}(x_0) \neq \vec{0})$ съществуват координати в които то има вида $(1, 0, \dots, 0)$. (Т.е. може "да се изправи")

Въпрос. В сила ли е това за ковариантно поле?

$b_i(x)$ $\left(b'_1(x') = \frac{\partial x^k}{\partial x'_i}(x')\, b_k(x(x')) \right)$ (не)

<u>Връзка с първите интеграли на характеристичната система</u>

Нека $a_1(x_1,x_2)\partial_1 u + a_2(x_1,x_2)\partial_2 u = 0$ - лин. ЧДУ

$$\begin{vmatrix} \dot{x}_1(s) = a_1(x_1,x_2) \\ \dot{x}_2(s) = a_2(x_1,x_2) \end{vmatrix}$$ — хар. система

Всяко решение на лин. ЧДУ е първи интеграл на характ. система и всеки първи интеграл на характ. система е решение на лин. ЧДУ. Общото решение е множеството на първите интеграли

За система ОДУ от горния тип изобщо има един независим първи интеграл $C(x_1,x_2)$ и всички останали се получават от него.

$u(x_1,x_2) = f(C(x_1,x_2))$, където f е произволна функция на една променлива е общия вид на първите интеграли и общото решение на лин. ЧДУ

Ако знаем общото решение, можем "по принцип" да решим задачата на Коши. Т.е. ако наложим условието $u(x_1(t), x_2(t)) = u_0(t)$, трябва да намерим подходяща функция f такава, че

$u(x_1,x_2) = f(C(x_1,x_2))$.

Ако $C(x_1,x_1)$ е независим, той приема различни стойности върху характеристиките. Кривата $\gamma = (x_1(t), x_2(t))$ пресича всяка характеристика веднъж

Тогава $\xi = C(x_1(t), x_2(t))$ е обратима функция
$\to$ $\xi = \xi(t)$ и $t = t(\xi)$.

Тогава от:

$$u(x_1(t), x_2(t)) \equiv f(C(x_1(t), x_2(t))) \equiv f(\xi(t)) = u_0(t)$$

$$\Rightarrow f(\xi) = u_0(t(\xi))$$

<u>Коментар</u>

Ако познаваме $C(x_1, x_2)$ намирането на $f(\xi)$ и от там решението $u(x_1, x_2) = f(C(x_1, x_2))$ се извършва само с "алгебрични операции".

<u>Задача</u> (повторение)

$$x_2 \partial_1 u + x_1 \partial_2 u = 0, \quad u(0, t) = \sin t$$

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = x_1 \end{cases} \qquad \begin{cases} x_1 = \alpha_1 e^{s} + \alpha_2 e^{-s} \\ x_2 = \alpha_1 e^{s} - \alpha_2 e^{-s} \end{cases}$$

$x_1^2 - x_2^2 = 4\alpha_1\alpha_2$ - първи интеграл.

В областта на решимост (2) той е независим

$$C(x_1, x_2) = x_1^2 - x_2^2 \quad ; \quad x_1(t) = 0, \; x_2(t) = t$$

$$\xi = C(x_1(t), x_2(t)) = -t^2 \Rightarrow t = +\sqrt{-\xi}$$

$$f(\xi) = \sin(\sqrt{-\xi}) = \sin\sqrt{-(x_1^2 - x_2^2)} = \sin\sqrt{x_2^2 - x_1^2}$$

<u>При три променливи</u>

$$a_1 \partial_1 u + a_2 \partial_2 u + a_3 \partial_3 u = 0$$

$$\begin{cases} \dot{x}_1(s) = a_1(x_1, x_2, x_3) \\ \dot{x}_2(s) = a_2(x_1, x_2, x_3) \\ \dot{x}_3(s) = a_3(x_1, x_2, x_3) \end{cases}$$

"Изобщо" имаме два независими първи интеграла $C_1(\vec{x})$, $C_2(\vec{x})$

Общото решение е: $u(\vec{x}) = f(C_1(\vec{x}), C_2(\vec{x}))$
където $f(\xi_1, \xi_2)$ е произволна функция на две променливи

Решаване на задачата на Коши: Условие

$u(\vec{x}(t_1,t_2)) = u_0(t_1,t_2)$

Трябва да намерим функция $f(\xi_1,\xi_2)$ такава, че
$u(\vec{x}) = f(C_1(\vec{x}), C_2(\vec{x}))$ да е търсеното решение

Системата

$$\left|\begin{array}{l}\xi_1 = C_1(\vec{x}(t_1,t_2))\\ \xi_2 = C_2(\vec{x}(t_1,t_2))\end{array}\right. \quad \text{е обратима} \Rightarrow \quad \left|\begin{array}{l}t_1 = t_1(\xi_1,\xi_2)\\ t_2 = t_2(\xi_1,\xi_1)\end{array}\right.$$

Тогава от: $f(C_1(\vec{x}(t_1,t_2)), C_2(\vec{x}(t_1,t_2))) = u_0(t_1,t_2) \Rightarrow$

$f(\xi_1,\xi_2) = u_0(t_1(\xi_1,\xi_2), t_2(\xi_1,\xi_2))$ и

$u(x) = f(C_1(\vec{x}), C_2(\vec{x})) \Rightarrow u(\vec{x}(\vec{t})) = u_0(\vec{t}(\vec{\xi}(\vec{t}))) = u_0(\vec{t})$

Напишете обобщението за n променливи

<u>Квазилинейно уравнение</u> (2 променливи)

Общ вид:

$$a_1(x_1,x_2,u)\,\partial_1 u + a_2(x_1,x_2,u)\,\partial_2 u + a(x_1,x_2,u) = 0$$

(квазилинейното уравнение не е линейно. Линейна комбинация от решения изобщо не е решение

<u>Задача на Коши</u>

Дадено: крива $\gamma = (x_1(t), x_2(t))$, $t \in \Delta$ и функция $u_0(t)$ дефинирана върху кривата. Да се намери решение $u = u(x_1,x_2)$ за което $u(x_1(t), x_2(t)) = u_0(t)$

Ако
$$\begin{vmatrix} a_1(x_1(t), x_2(t), u_0(t)) & \dot{x}_1(t) \\ a_2(x_1(t), x_2(t), u_0(t)) & \dot{x}_2(t) \end{vmatrix} \neq 0 \quad \forall t \in \Delta$$

в околност на γ съществува единствено такова решение

Алгоритъм:

① Намираме общото решение на характеристичната система

$$\left|\begin{array}{l} \dot{x}_1(s) = a_1(x_1, x_2, u) \\ \dot{x}_2(s) = a_2(x_1, x_2, u) \\ \dot{u}(s) = -a(x_1, x_2, u) \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} x_1 = x_1(s, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) \\ x_2 = x_2(s, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) \\ u = u(s, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) \end{array}$$

② Налагаме началните условия при $s=0$

$$\left|\begin{array}{l} x_1(0, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = x_1(t) \\ x_2(0, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = x_2(t) \\ u(0, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = u_0(t) \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} \alpha_1 = \alpha_1(t) \\ \alpha_2 = \alpha_2(t) \\ \alpha_3 = \alpha_3(t) \end{array}\right\} \Rightarrow \left|\begin{array}{l} x_1 = x_1(s, t) \\ x_2 = x_2(s, t) \\ u = u(s, t) \end{array}\right.$$

③ Решаваме системата

$$\left|\begin{array}{l} x_1 = x_1(s, t) \\ x_2 = x_2(s, t) \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} s = s(x_1, x_2) \\ t = t(x_1, x_2) \end{array}$$

④ $u(x_1, x_2) = u(s(x_1, x_2), t(x_1, x_2))$ е решение

Задача

$$\ln(x_2) \cdot \partial_1 u + x_2 \cdot u \cdot \partial_2 u - u = 0, \quad u = u(x_1, x_2), \quad x_2 > 0$$

Условие на Коши: $u(t+1, e) = 1, \quad t \in (-\infty, +\infty)$

Тук: $x_1(t) = t+1$; $x_2(t) = e$; $u_0(t) = 1$

Решение

① $$\left|\begin{array}{l} \dot{x}_1(s) = \ln(x_2) \\ \dot{x}_2(s) = x_2 \cdot u \longrightarrow \dot{x}_2 = x_2 \cdot \alpha_3 \cdot e^s \longrightarrow x_2 = \alpha_2 e^{\alpha_3 \cdot e^s} \\ \dot{u}(s) = u \longrightarrow u = \alpha_3 e^s \end{array}\right.$$

$$\rightarrow \dot{x}_1(s) = \ln\left(\alpha_2 e^{\alpha_3 e^s}\right) = \ln\alpha_2 + \alpha_3 e^s \rightarrow x_1 = \alpha_3 e^s + \ln\alpha_2 \cdot s + \alpha_1$$

$$\left|\begin{array}{l} x_1 = \alpha_3 e^s + \ln\alpha_2 \cdot s + \alpha_1 \\ x_2 = \alpha_2 e^{(\alpha_3 \cdot e^s)} \\ u = \alpha_3 e^s \end{array}\right.$$

② при $s = 0$

$$\left| \begin{array}{l} \alpha_3 + \alpha_1 = t + 1 \\ \alpha_2 e^{\alpha_3} = e \\ \alpha_3 = 1 \end{array} \right\} \Rightarrow \left| \begin{array}{l} \alpha_1 = t \\ \alpha_2 = 1 \\ \alpha_3 = 1 \end{array} \right\} \Rightarrow \left| \begin{array}{l} x_1 = e^s + t \\ x_2 = e^{e^s} \\ u = e^s \end{array} \right.$$

③ решаване системата

$$\left| \begin{array}{l} x_1 = e^s + t \\ x_2 = e^{e^s} \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} t = x_1 - \ln x_2 \\ \rightarrow e^s = \ln x_2 \end{array}$$

(за тази задача това не е необходимо)

④ $u(x_1, x_2) = \ln x_2$

Задача

Намерете решение $u = u(x_1, x_2)$ на уравнението $u . \partial_1 u + \partial_2 u - x_1 = 0$, удовлетворяващо условието на Коши $u(t, 0) = 0$, $t \in (-\infty, +\infty)$

Решение

① $$\left| \begin{array}{l} \dot{x}_1 = u \\ \dot{x}_2 = 1 \\ \dot{u} = x_1 \end{array} \right. \longrightarrow x_2 = s + \alpha_2 \; ; \quad \begin{array}{l} \dot{x}_1 = u \\ \dot{u} = x \end{array} \rightarrow \begin{array}{l} x_1 = \alpha_1 e^s + \alpha_3 e^{-s} \\ u = \alpha_1 e^s - \alpha_3 e^{-s} \end{array}$$

$$\left| \begin{array}{l} x_1 = \alpha_1 e^s + \alpha_3 e^{-s} \\ x_2 = s + \alpha_2 \\ u = \alpha_1 e^s - \alpha_3 e^{-s} \end{array} \right.$$

② при $s = 0$

$$\left| \begin{array}{ll} \alpha_1 + \alpha_3 = t & \rightarrow \alpha_1 = \frac{1}{2} t \\ \alpha_2 = 0 & \alpha_2 = 0 \\ \alpha_1 - \alpha_3 = 0 & \alpha_3 = \frac{1}{2} t \end{array} \right\} \Rightarrow \left| \begin{array}{l} x_1 = t \dfrac{e^s + e^{-s}}{2} = t . ch\, s \\ x_2 = s \\ u = t \dfrac{e^s - e^{-s}}{2} = t . sh\, s \end{array} \right.$$

③ решаване системата

$$\left| \begin{array}{l} x_1 = t\, ch\, s \\ x_2 = s \end{array} \right\} \Rightarrow \left| \begin{array}{l} t = x_1 \dfrac{1}{ch\, x_2} \\ s = x_2 \end{array} \right.$$

④ $u(x_1, x_2) = x_1 \dfrac{1}{ch\, x_2} sh\, x_2$

$u(x_1, x_2) = x_1\, th\, x_2$

Формулирайте естественото обобщение за случая на n променливи: $u = u(x_1, \dots, x_n)$

$$\sum_{i=1}^{n} a_i(\vec{x}, u)\, \partial_i u + a(\vec{x}, u) = 0$$

Характеристичната система е

$$\begin{cases} \dot{x}_1(s) = a_1(x_1, \dots, x_n, u) \\ \vdots \\ \dot{x}_n(s) = a_n(x_1, \dots, x_n, u) \\ \dot{u}(s) = -a(x_1, \dots, x_n, u) \end{cases}$$

И.т.н.

Задача

Намерете решение $u = u(x_1, x_2, x_3)$ на уравнението

$x_2 \partial_1 u + x_1 \partial_2 u - x_3^2 \partial_3 u - x_1 x_2 = 0$ удовлетворяващо условието на Коши: $u(t_1, 0, \frac{1}{t_2}) = \sin t_2 + \frac{1}{4} t_1^2$

$\left[x_1(t_1,t_2) = t_1,\ x_2(t_1,t_2) = 0,\ x_3(t_1,t_2) = \frac{1}{t_2},\ u_0(t_1,t_2) = \sin t_2 + \frac{1}{4} t_1^2 \right]$

Решение

① $\begin{cases} \dot{x}_1(s) = x_2 \\ \dot{x}_2(s) = x_1 \\ \dot{x}_3(s) = -x_3^2 \\ \dot{u}(s) = x_1 . x_2 \end{cases}$ $\quad \begin{matrix} x_1 = \alpha_1 e^{s} + \alpha_2 e^{-s} \\ x_2 = \alpha_1 e^{s} - \alpha_2 e^{-s} \end{matrix}$

$\longrightarrow -\frac{dx_3}{x_3^2} = ds \Rightarrow \frac{1}{x_3} = s + \alpha_3 \Rightarrow x_3 = \frac{1}{s + \alpha_3}$

$$\dot{u}(s) = (\alpha_1 e^{s} + \alpha_2 e^{-s})(\alpha_1 e^{s} - \alpha_2 e^{-s}) = \alpha_1^2 e^{2s} - \alpha_2^2 e^{-2s}$$

$$u(s) = \frac{1}{2}\alpha_1^2 e^{2s} + \frac{1}{2}\alpha_2^2 e^{-2s} + \alpha_4$$

$$\begin{cases} x_1 = \alpha_1 e^{s} + \alpha_2 e^{-s} \\ x_2 = \alpha_1 e^{s} - \alpha_2 e^{-s} \\ x_3 = \dfrac{1}{s + \alpha_3} \\ u = \frac{1}{2}(\alpha_1^2 e^{2s} + \alpha_2^2 e^{-2s}) + \alpha_4 \end{cases}$$

② при $s=0$

$$\left|\begin{aligned} \alpha_1+\alpha_2 &= t_1\\ \alpha_1-\alpha_2 &= 0\\ \frac{1}{\alpha_3} &= \frac{1}{t_2}\\ \frac{1}{2}(\alpha_1^2+\alpha_2^2)+\alpha_4 &= \sin t_2+\frac{1}{4}t_1^2 \end{aligned}\right. \Rightarrow \left|\begin{aligned} \alpha_1 &= \frac{1}{2}t_1\\ \alpha_2 &= \frac{1}{2}t_1\\ \alpha_3 &= t\\ \alpha_4 &= \sin t_2 \end{aligned}\right.$$

$$\left|\begin{aligned} x_1 &= t_1\,\frac{e^{s}+e^{-s}}{2}\\ x_2 &= t_1\,\frac{e^{s}-e^{-s}}{2}\\ x_3 &= \frac{1}{s+t_2}\\ u &= \frac{1}{4}t_1^2\,\frac{e^{2s}+e^{-2s}}{2}+\sin t_2 \end{aligned}\right. \qquad \left|\begin{aligned} x_1 &= t_1\,\mathrm{ch}\, s\\ x_2 &= t_1\,\mathrm{sh}\, s\\ x_3 &= \frac{1}{s+t_2}\\ u &= \frac{1}{4}t_1^2\,\mathrm{ch}(2s)+\sin t_2 \end{aligned}\right.$$

$$\left(u = \frac{1}{4}t_1^2\left(\mathrm{ch}^2(s)+\mathrm{sh}^2(s)\right)+\sin t_2\right.$$

③ решаваме системата

$$\left|\begin{aligned} x_1 &= t_1\,\mathrm{ch}\, s\\ x_2 &= t_1\,\mathrm{sh}\, s\\ x_3 &= \frac{1}{s+t_2} \end{aligned}\right. \Rightarrow \left|\begin{aligned} & x_1^2-x_2^2 = t_1^2\\ & x_1^2+x_2^2 = t_1^2\left(\mathrm{ch}^2(s)+\mathrm{sh}^2(s)\right),\\ & \mathrm{th}\, s = \frac{x_2}{x_1} \to s = \mathrm{arctgh}\left(\frac{x_2}{x_1}\right) \end{aligned}\right.$$

$$t_2 = \frac{1}{x_3}-s = \frac{1}{x_3}-\mathrm{arctgh}\left(\frac{x_2}{x_1}\right)$$

$$\Rightarrow u(x_1,x_2,x_3) = \frac{1}{4}\left(x_1^2+x_2^2\right)+\sin\left(\frac{1}{x_3}-\mathrm{arctgh}\left(\frac{x_2}{x_1}\right)\right)$$

Задание:

Да се намери решение $u=u(x_1,x_2)$:

1. $u\cdot\partial_1 u+\partial_2 u-x_1=0$; $u(t,0)=0$, $t\in(-\infty,+\infty)$

   $u(x_1,x_2)=x_1\,\mathrm{th}(x_2)$ (10.09.1995)

2. $2\partial_1 u+x_1x_2\,\partial_2 u-u=0$; $u(0,t)=\sin(t^2)$; $t\in(-\infty,+\infty)$

   $u(x_1,x_2)=\sin\left(x_2\cdot e^{-\frac{x_1^2}{4}}\right)^2\cdot e^{\frac{x_1}{2}}$ (04.09.1997)

3. $x_1 . \partial_1 u + x_1 . x_2 \partial_2 u - \ln x_2$; $u(1, e.t) = 1 + \sin t$, $t \in (0, \infty)$ (в областта $x_1 > 0$, $x_2 > 0$)

$$u(x_1, x_2) = \ln(x_1) . \ln(x_2) - x_1 \ln(x_1) + x_1 + \sin\left(\frac{x_2}{e^{x_1}}\right)$$

(12.09.1998)

Обвивки

$f(x,y,z,a) = 0$ еднопараметрична фамилия повърхнини в $\mathbb{R}^3$. Уравнение за обвивката:

$$\left| \begin{array}{l} f(x,y,z,a) = 0 \\ \partial_a f(x,y,z,a) = 0 \to a = a(x,y,z) \end{array} \right. \quad \Bigg\}$$ "изключваме a от уравненията"

$g(x,y,z) = f(x,y,z,a(x,y,z)) = 0$ – ур. за обвивката

Задача

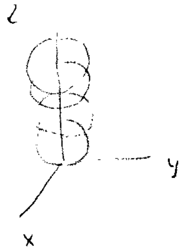
Намерете обвивката на еднопарам. фамилия от повърхнини:

$x^2 + y^2 + z^2 - 2az + a^2 - c^2 = 0$; a – параметър на фамилията, c – константа

$x^2 + y^2 + (z-a)^2 = c^2 \to S_a$: сфера с център $(0,0,a)$ и радиус $c = const$

Уравнения:

$$\left| \begin{array}{l} x^2 + y^2 + z^2 - 2az + a^2 - c^2 = 0 \\ -2z + 2a = 0 \to a = z \end{array} \right.$$



$x^2 + y^2 + z^2 - 2.z.z + z^2 - c^2 = 0 \Rightarrow x^2 + y^2 = c^2$

Обвивката е цилиндър с ос: оста "z" и радиус c

Какво ще стане ако фиксираме a и считаме че c е параметър $\to$ концентрични сфери с общ център $(0,0,a)$ и радиус c – геометрически очевидно че няма обвивка

$$\begin{cases} x^2+y^2+z^2-2az+a^2-c^2=0 \\ -2c=0 \end{cases} \quad x^2+y^2+(z-a)^2=0$$

Получаваме точка

Задача

Намерете обвивката на еднопараметричната фамилия повърхнини

$$x^2+y^2+z^2-2a(x\cos\alpha+y\sin\alpha)+a^2-c^2=0\ ; \quad a^2>c^2$$

α – параметър, a и c – константи

$(x-a\cos\alpha)^2+(y-a\sin\alpha)^2+z^2=c^2$; $\alpha \to S_\alpha$ сфера е

център: $(a\cos\alpha, a\sin\alpha, 0)$ и радиус c

Очевидно обвивката е тор

Уравнение

$$\begin{cases} x^2+y^2+z^2-2a(x\cos\alpha+y\sin\alpha)+a^2-c^2=0 \\ -2a(-x\sin\alpha+y\cos\alpha)=0 \end{cases}$$

В цилиндрични координати

$$\begin{cases} x=\rho\cos\varphi \\ y=\rho\sin\varphi \\ z=z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \rho^2+z^2-2a\rho(\cos\varphi\cos\alpha+\sin\varphi\sin\alpha)+a^2-c^2=0 \\ -\cos\varphi\sin\alpha+\sin\varphi\cos\alpha=0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \rho^2+z^2-2a\rho\cos(\varphi-\alpha)+a^2-c^2=0 \\ \sin(\varphi-\alpha)=0 \end{cases}$$

трябва да се изключи α

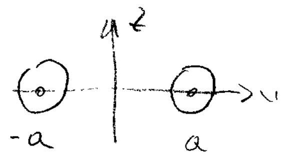
$\sin(\varphi-\alpha)=0 \to \alpha=\varphi \to \cos(\varphi-\alpha)=1$

$\Rightarrow \rho^2+z^2-2a\rho+a^2-c^2=0 \to$ азимутално симетрие

при $\varphi=0 \to \begin{cases} x=\rho \\ y=0 \\ z=z \end{cases} \Rightarrow \begin{array}{l} x^2+z^2-2ax+a^2=c^2 \\ (x-a)^2+z^2=c^2 \end{array}$ – окръжност

Уравнението $\rho^2+z^2+2a\rho+a^2-c^2$ описва същата пов.

$\varphi=0 \to$ " $(x+a)^2+z^2=c^2 \to$ окръжност. При въртене същата повърхност



$$\begin{cases} \sin(\varphi-\alpha)=0 \\ \alpha=\varphi+n\pi \end{cases} \to$$ при всеки избор на n т.е. $\cos(\varphi-\alpha)=\pm 1$ едно и също повърхност.

Общ случай на нелинейно уравнение

$F(x_1, x_2, u, \partial_1 u, \partial_2 u) = 0$. Определя се от своя символ

$F(x_1, x_2, u, p_1, p_2)$ – функция на пет променливи

Задача на Коши (същото условие)

Дадено: Крива $\gamma = (x_1(t), x_2(t))$, $t \in \Delta$ – интервал

Функция $u_0(t) = u_0(x_1(t), x_2(t))$ дефинирана в $\forall\, \gamma$

Да се намери решение $u = u(x_1, x_2)$, такова, че

$u(x_1(t), x_2(t)) = u_0(t)$

Алгоритъм

① Намираме началната ивица

$$\left|\begin{array}{l} p_1 \cdot \dot{x}_1(t) + p_2 \cdot \dot{x}_2(t) = \dot{u}_0(t) \\ F(x_1(t), x_2(t), u_0(t), p_1, p_2) = 0 \end{array}\right\} \quad \begin{array}{l} p_1 = p_1(t) \\ p_2 = p_2(t) \end{array}$$

Началната ивица е

$x_1(t)$, $x_2(t)$, $u_0(t)$, $p_1(t)$, $p_2(t)$

② Намираме общото решение на системата на Лагранж – Шарпи

$$\left|\begin{array}{l} \dot{x}_1(s) = \partial_{p_1} F(x_1, x_2, u, p_1, p_2) \\ \dot{x}_2(s) = \partial_{p_2} F \\ \dot{u}(s) = p_1 \cdot \partial_{p_1} F + p_2 \cdot \partial_{p_2} F \\ \dot{p}_1(s) = -\partial_{x_1} F - p_1 \partial_u F \\ \dot{p}_2(s) = -\partial_{x_2} F - p_2 \partial_u F \end{array}\right\} \Rightarrow \left|\begin{array}{l} x_1 = x_1(s, \alpha_1, \dots, \alpha_5) \\ x_2 = x_2(\text{—}, \text{—}) \\ u = u(\text{—}, \text{—}) \\ p_1 = p_1(\text{—}, \text{—}) \\ p_2 = p_2(s, \alpha_1, \dots, \alpha_5) \end{array}\right.$$

③ При $s = 0$ налагаме начални условия:
(Пускаме характеристични ивици пресичащи началната ивица)

$$\left|\begin{array}{l} x_1(0, \alpha_1 \dots \alpha_5) = x_1(t) \\ x_2(0, \alpha_1, \dots, \alpha_5) = x_2(t) \\ u(0, \alpha_1, \dots, \alpha_5) = u_0(t) \\ p_1(0, \alpha_1, \dots, \alpha_5) = p_1(t) \\ p_2(0, \alpha_1, \dots \alpha_5) = p_2(t) \end{array}\right\} \Rightarrow \left|\begin{array}{l} \alpha_1 = \alpha_1(t) \\ \alpha_2 = \alpha_2(t) \\ \vdots \\ \alpha_5 = \alpha_5(t) \end{array}\right\} \Rightarrow \left|\begin{array}{l} x_1 = x_1(s, t) \\ x_2 = x_2(s, t) \\ u = u(s, t) \\ p_1 = p_1(s, t) \\ p_2 = p_2(s, t) \end{array}\right.$$

④ Решаване системата

$$\left| \begin{array}{l} x_1 = x_1(s,t) \\ x_2 = x_2(s,t) \end{array} \right\} \Rightarrow \left| \begin{array}{l} s = s(x_1, x_2) \\ t = t(x_1, x_2) \end{array} \right.$$

⑤ Решението е

$u(x_1,x_2) = u(s(x_1,x_2), t(x_1,x_2))$

При което е изпълнено

$p_i(s,t) = \partial_{x_i} u(x_1(s,t), x_2(s,t))$

Задача

Намерете решение $u = u(x_1,x_2)$ на уравнението $(\partial_1 u)^2 - \partial_2 u = 0$, удовлетворяващо условието на Коши $u(t,1) = t^2$

Решение

$x_1(t) = t, \quad x_2(t) = 1, \quad u_0(t) = t^2 \quad ; \quad F = p_1^2 - p_2$

① Начални данни

$$\left| \begin{array}{l} p_1 \cdot 1 + p_2 \cdot 0 = 2t \\ p_1^2 - p_2 = 0 \end{array} \right\} \begin{array}{l} \to p_1 = 2t \\ \to p_2 = 4t^2 \end{array}$$

$\Rightarrow \left(x_1(t) = t,\ x_2(t) = 1,\ u_0(t) = t^2,\ p_1(t) = 2t,\ p_2(t) = 4t^2 \right)$

② Решаване системата

$$\left| \begin{array}{llll} \dot{x}_1 = 2p_1 & \to \dot{x}_1 = 2\alpha_4 & \to x_1 = 2\alpha_4 s + \alpha_1 \\ \dot{x}_2 = -1 & \to x_2 = -s + \alpha_2 & \\ \dot{u} = 2p_1^2 - p_2 & \to \dot{u} = 2\alpha_4^2 - \alpha_5 & \to u = (2\alpha_4^2 - \alpha_5)s + \alpha_3 \\ \dot{p}_1 = 0 & \to p_1 = \alpha_4 & \\ \dot{p}_2 = 0 & \to p_2 = \alpha_5 & \end{array} \right.$$

$$\left|\begin{aligned} x_1 &= 2\alpha_4 s + \alpha_1 \\ x_2 &= -s + \alpha_2 \\ u &= (2\alpha_4^2 - \alpha_5)s + \alpha_3 \\ p_1 &= \alpha_4 \\ p_2 &= \alpha_5 \end{aligned}\right.$$

(3) при $s = 0$

$$\left.\begin{aligned} \alpha_1 &= t \\ \alpha_2 &= 1 \\ \alpha_3 &= t^2 \\ \alpha_4 &= 2t \\ \alpha_5 &= 4t^2 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left|\begin{aligned} x_1 &= 4ts + t \\ x_2 &= -s + 1 \\ u &= (8t^2 - 4t^2)s + t^2 \\ p_1 &= 2t \\ p_4 &= 4t^2 \end{aligned}\right.$$

(4) Решаваме системата

$$\left|\begin{aligned} x_1 &= 4ts + t \;\rightarrow\; x_1 = t(4s+1) = t(4-4x_2+1) = t(5-4x_2) \\ x_2 &= -s+1 \;\rightarrow\; s = 1 - x_2 \end{aligned}\right.$$

$$\left|\begin{aligned} s &= 1 - x_2 \\ t &= \frac{x_1}{5-4x_2} \end{aligned}\right.$$

(5) Решението е: $u = 4t^2 \cdot s + t^2 = t^2(4s+1)$

$$u(x_1, x_2) = \left(\frac{x_1}{5-4x_2}\right)^2 \left(4(1-x_2)+1\right) = \frac{x_1^2}{(5-4x_2)^2}\cancel{(5-4x_2)}$$

$$u(x_1, x_2) = \frac{x_1^2}{5-4x_2}$$

Проверка. $\partial_{x_1} u(x_1, x_2) = \dfrac{2x_1}{5-4x_2}$

$$p_1(s,t) = 2t = 2(4ts+t) \cdot \frac{1}{5-4(1-s)} = \frac{2t\cancel{(4s+1)}}{\cancel{(4s+1)}}$$

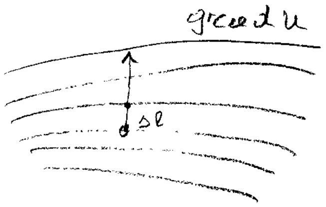
Геометрична оптика и уравнения за ейконала

Начален проблем

"Разпространения на пожари в непресечената гора"

В "непресечената гора" се разпространява пожар фронтът на идеализирания пожар е една крива. Гората е изотропна. Във всяка точка големината на скоростта на горящия фронт (мигновено през тази точка) е едно и също във всички посоки на пламъване.

Тогава тя и характеризира с една скаларна функция $V(x_1,x_2)$ - това скоростта на горящия фронт в точка (x_1,x_2). Изобщо функцията $V(x_1,x_2)$ не е константа, т.е. гората не е хомогенна. Ако в началния момент от време $\tau=0$ е зададен фронтът на пожара - т.е. крива $\gamma=(x_1(t), x_2(t))$ как ще изглежда фронтът на пожара в момента τ? Как да опишем разпространението? "По принцип" линиите на фронта, в различните моменти, образуват еднопараметрична фамилия от криви и те могат да се опишат с алгебрично уравнение $u(x_1,x_2)=\tau$. Конкретен процес на разпространение се описва с функция $u(x_1,x_2)$ като стойността $u(x_1,x_2)$ в точка (x_1,x_2) е времето τ когато фронтът преминава през тази точка. Как можем да намерим функцията $u(x_1,x_2)$ описваща движението на фронта ако е дадена характеристиката на гората $V(x_1,x_2)$ и положението на фронта в един даден момент $(\tau=0)$? Трябва да намерим ЧДУ за функцията $u(x_1,x_2)$



$$|\operatorname{grad} u(\bar{x})| = \frac{\Delta \tau}{\Delta l} = \frac{1}{\frac{\Delta l}{\Delta \tau}} = \frac{1}{V(\bar{x})}$$

$$n(x_1,x_2) := \frac{1}{V(x_1,x_2)}$$ "показател на пречупване"

$$\Rightarrow |\operatorname{grad} u(x)| = n(x) \Rightarrow \underline{\operatorname{grad}^2 u(x_1,x_2) - n^2(x_1,x_2) = 0}$$

нелинейно ЧДУ, т.нар. "Уравнение за ейконала"

Ако в момента $\tau=0$ фронтът на пожара е кривата $\gamma=(x_1(t), x_2(t))$ задачата за намиране движението на фронта се формулира така:

Намерете решение $u = u(x_1, x_2)$ на уравнението $(\partial_1 u)^2 + (\partial_2 u)^2 - n^2(x_1, x_2) = 0$ удовлетворяващо условието на Коши: $u(x_1(t), x_2(t)) = 0$

Тогава уравнението $u(x_1, x_2) = \tau$ задава фронта на пожара в момент τ.

<u>Задача</u>

Намерете фронта на "пожара" в "гора" с коефициент на пречупване $n(x_1, x_2) = x_1$, област на решимост $x_1 > 0$, ако в началния момент $\tau = 0$ фронтът е по кривата $x_1 = t$, $x_2 = 0$, $t > 0$

<u>Решение</u>

Трябва да се намери решение $u = u(x_1, x_2)$ на уравн. $(\partial_1 u)^2 + (\partial_2 u)^2 - x_1^2 = 0$, при $x_1 > 0$, удовлетворяващо условието на Коши $u(t, 0) = 0$, $t > 0$

$F = p_1^2 + p_2^2 - x_1^2 \longrightarrow F = \frac{1}{2}(p_1^2 + p_2^2 - x_1^2)$

(еквивалентно уравнение - за удобство)

① Начална ивица

$$\left| \begin{array}{ll} p_1 \cdot 1 + p_2 \cdot 0 = 0 & \rightarrow p_1 = 0 \\ p_1^2 + p_2^2 - t^2 = 0 & \rightarrow p_2 = \pm t \end{array} \right.$$

Уравнението определя две начални ивици.

Тази многозначност е физически оправдана. В условието е казано в момента $\tau = 0$ къде е фронтът на пожара но не е указана <u>посоката</u>!

Избираме $p_2 = +t$. Получаваме начална ивица:

$x_1(t) = t$, $x_2(t) = 0$, $u_0(t) = 0$, $p_1(t) = 0$, $p_2(t) = t$

② Решаваме характеристичната система

$$\left|\begin{array}{l} \dot{x}_1(s) = p_1 \\ \dot{x}_2(s) = p_2 \\ \dot{u}(s) = p_1^2 + p_2^2 \\ \dot{p}_1(s) = x_1 \\ \dot{p}_2(s) = 0 \end{array}\right. \qquad \left|\begin{array}{l} x_1 = \alpha_1 e^{s} + \alpha_2 e^{-s} \\ p_1 = \alpha_1 e^{s} - \alpha_2 e^{-s} \end{array}\right.$$

$$; \ \dot{x}_2(s) = \beta_2 \to x_2(s) = \beta_2 \cdot s + \beta_1$$

$$\dot{p}_2(s) = 0 \to p_2 = \beta_2$$

$$p_1^2 + p_2^2 = x_1^2$$

$$\dot{u}(s) = p_1^2 + p_2^2 = x_1^2 = \alpha_1^2 e^{2s} + \alpha_2 e^{-2s} + 2\alpha_1\alpha_2$$

$$u = \frac{1}{2}\alpha_1^2 e^{2s} - \frac{1}{2}\alpha_2^2 e^{-2s} + 2\alpha_1\alpha_2 s + \gamma$$

$$\left|\begin{array}{l} x_1 = \alpha_1 e^{s} + \alpha_2 e^{-s} \\ p_1 = \alpha_1 e^{s} - \alpha_2 e^{-s} \\ x_2 = \beta_2 \cdot s + \beta_1 \\ p_2 = \beta_2 \\ u = \frac{1}{2}\alpha_1^2 e^{2s} - \frac{1}{2}\alpha_2^2 e^{-2s} + 2\alpha_1\alpha_2 \cdot s + \gamma \end{array}\right.$$

③ Начални условия при $s = 0$

$$\begin{array}{ll} x_1 \to & \alpha_1 + \alpha_2 = t \\ p_1 \to & \alpha_1 - \alpha_2 = 0 \\ x_2 \to & \beta_1 = 0 \\ p_2 \to & \beta_2 = t \\ u \to & \frac{1}{2}(\alpha_1^2 - \alpha_2^2) + \gamma = 0 \end{array} \Rightarrow \left|\begin{array}{l} \alpha_1 = \frac{1}{2}t \\ \alpha_2 = \frac{1}{2}t \\ \beta_1 = 0 \\ \beta_2 = t \\ \gamma = 0 \end{array}\right. \Rightarrow \left|\begin{array}{l} x_1 = t\,\frac{e^{s} + e^{-s}}{2} \\ x_2 = t s \\ u = \frac{t^2}{4}\,\frac{e^{2s} - e^{-2s}}{2} + \frac{1}{2}t^2 s \\ p_1 = t\,\frac{e^{s} - e^{-s}}{2} \\ p_2 = t \end{array}\right.$$

④ Трябва да се реши системата

$$\left|\begin{array}{l} x_1 = t.\mathrm{ch}\, s \\ x_2 = t.s \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} s = s(x_1, x_2) \\ t = t(x_1, x_2) \end{array}$$

Но решението не е в "елементарни" функции

⑤ Решението $u = u(x_1, x_2)$ е

$$u(x_1, x_2) = u(s(x_1, x_2), t(x_1, x_2))$$

В задачата се търси фронтът на пожара в момент τ. Фронтът е крива определена от уравнението: $u(x_1, x_2) = \tau$.
Отчитайки вида на решението в (5), получаваме, че фронтът е крива в равнината $\mathbb{R}^2 \ni (x_1, x_2)$ определена от системата уравнения:

$$\left|\begin{array}{l} x_1 = t \cdot ch(s) \\ x_2 = t \cdot s \\ \tau = \dfrac{t^2}{4}\left(sh(2s) + 2s\right) \qquad ; \quad (= u(s,t)) \end{array}\right.$$

"τ" е фиксирано. Трябва да намерим всички двойки (x_1, x_2) които удовлетворяват горната система. Това е крива и за параметър може да се избере s като се изключи t. (Този избор не е задължителен, но за конкретния случай е най-удобен)

$$t = \frac{2\sqrt{\tau}}{\sqrt{sh(2s) + 2s}} \qquad ; \qquad (t > 0)$$

$$\left|\begin{array}{l} x_1 = \dfrac{2\sqrt{\tau}\, ch(s)}{\sqrt{sh(2s) + 2s}} \\[2ex] x_2 = \dfrac{2\sqrt{\tau} \cdot s}{\sqrt{sh(2s) + 2s}} \end{array}\right\} \text{ параметрично задаване на фронта в момент } \tau.$$

Лъчи на разпространението

Нека функцията $\tau = u(x_1, x_2)$ описва разпространение на фронт. Лъчи на разпространението са линии които във всяка своя точка са перпендикулярни на фронта през тази точка. Как можем да ги намерим? Нека $(x_1(s), x_2(s))$ е параметрично зададен лъч на разпространение.

По дефиниция $\dot{\vec{x}}(s) = \operatorname{grad} U(\vec{x}(s))$

(по-точно да са колинеарни. Ако напишем примерно $\dot{\vec{x}}(s) = f(\vec{x}(s)).\operatorname{grad} U(\vec{x}(s))$, $f(\vec{x}) \neq 0$ ще получим същите криви, като едномерни подмногообразия, но с друга параметризация)

$$\begin{cases} \dot{x}_1(s) = \partial_1 U(x_1(s), x_2(s)) \\ \dot{x}_2(s) = \partial_2 U(x_1(s), x_2(s)) \end{cases}$$

При друга функция $\tau = U(x_1, x_2)$ описваща разпространение на фронт лъчите ще бъдат други.

Постановката е следната:

Имаме среда (фиксирана) с коефициент на пречупване $n(x_1, x_2)$. Разглеждаме всевъзможните фронтове които могат да се разпространяват в нея

Това са решение $\tau = U(x_1, x_2)$ на уравнението $\frac{1}{2}(\operatorname{grad}^2 U - n^2) = 0$. Тогава множеството на всички лъчи съответстващи на решенията на уравнението $\frac{1}{2}(\operatorname{grad}^2 U - n^2) = 0$ може да се опише като общо решение на система ОДУ от $\underline{II}$ ред

Уравнението $\frac{1}{2}(\operatorname{grad}^2 U - n^2) = 0$ със символ

$F = \frac{1}{2}\left(p_1^2 + p_2^2 - n^2(x)\right)$ определя системата на Лагр.-Шарпи

характеристиките са съответствени с решения $p_i = \partial_{x_i} U$ за някое решение

$$\begin{cases} \dot{x}_1(s) = p_1 \\ \dot{x}_2(s) = p_2 \\ \dot{u}(s) = p_1^2 + p_2^2 \\ \dot{p}_1(s) = n.\partial_1 n \\ \dot{p}_2(s) = n.\partial_2 n \end{cases}$$

Но ако $(x_1(s); x_2(s))$ е лъч за решението $U(x_1, x_2)$, тогава

$\dot{x}_1(s) = \partial_1 U(x_1(s), x_2(s)) = p_1(s)$

$\dot{x}_2(s) = \partial_2 U(x_1(s), x_2(s)) = p_2(s)$

$\Rightarrow \dot{\vec{x}}(s) = \vec{p} \Rightarrow \ddot{\vec{x}}(s) =$

$= \dot{\vec{p}}(s) = n.\operatorname{grad} n$

$\ddot{\vec{x}}(s) = n(\vec{x}).\,\mathrm{grad}(n(\vec{x}))$

Уравнения от II ред за лъчите в среда определена от коефициента на пречупване $n(\vec{x})$. Лъчът с определя от началното положение и началната "скорост".

Коментар

Така написаните уравнения са за фиксирана параметризация. При промяна на параметризацията видът на диференциалните уравнения се променя но едномерното подмногообразие определено от лъча остава непроменено. За удобство, могат да се изберат различни "канонични" параметризации.

Обща постановка

Важната информация в системата на Лагранж-Шарпи е характеристичната крива като подмногообразие а не конкретната параметризация. Еквивалентните ЧДУ имат едни и същи решения но различни системи на Лагр.-Шарпи. Тези различни системи ОДУ определят едни и същи характеристични криви, като едномерни подмногообразия, но с различна параметризация. Което не е важно и не води до същите решения.

Нека $f(x_1, x_2) \neq 0$ за вс. $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}_2$. Уравненията

$F(x_1, x_2, u, \partial_1 u, \partial_2 u) = 0$

$f(x_1, x_2).\,F(x_1, x_2, u, \partial_1 u, \partial_2 u) = 0$

са еквивалентни.

Характеристичната система на второто уравнение е:

Символът е $f(x_1,x_2)\cdot F(x_1,x_2,u,p_1,p_2)$

$$\begin{cases} \dot{x}_1(s) = f(x_1,x_2)\cdot \partial_{p_1} F \\ \dot{x}_2(s) = f(x_1,x_2)\cdot \partial_{p_2} F \\ \dot{u}(s) = f\cdot(p_1 \partial_{p_1} F + p_2 \partial_{p_2} F) \\ \dot{p}_1(s) = f\cdot(-\partial_{x_1} F - p_1 \partial_u F) - \partial_{x_1} f\cdot \underline{F(x_1,x_2,u,p_1,p_2)} \\ \dot{p}_2(s) = f\cdot(-\partial_{x_2} F - p_2 \partial_u F) - \partial_{x_2} f\cdot F\underline{(x_1,x_2,u,p_1,p_2)} \end{cases}$$

$$f(x_1,x_2)\cdot F(x_1,x_2,u,p_1,p_2) = 0 \Rightarrow F(x_1,x_2,u,p_1,p_2) = 0$$

Лъчите които разглеждаме са тези характеристични криви за които $F=0$. Само те участват в конструирането на решението. За тях дясната страна има общ коефицент на пропорционалност. Това означава че кривите като едномерни подмногообразия са същите, но параметризацията е различна

За уравнението на ейконала, и съответно за лъчите има три основни (и еквивалентни помежду си) случая

① $\frac{1}{2}(\text{grad}^2(u(\vec{x})) - n^2(\vec{x})) = 0 \to F = \frac{1}{2}(\vec{p}^{\,2} - n^2(\vec{x}))$

$$\begin{cases} \dot{\vec{x}}(s) = \vec{p} \\ \dot{\vec{p}}(s) = n(\vec{x})\cdot\text{grad}(n(\vec{x})) \\ \dot{u}(s) = \vec{p}^{\,2} \end{cases}$$

$$\vec{p}^{\,2} - n^2(\vec{x}) = 0 \to |\vec{p}| = n(\vec{x})$$

Уравнение за лъчите: $\underline{\ddot{\vec{x}}(s) = n(\vec{x})\cdot\text{grad}(n(\vec{x}))}$

Уравнението е просто, но параметърът "s" не е естествен

Геометрична дължина на лъча

$$dl = |\dot{\vec{x}}(s)|\,ds = |\vec{p}(s)|\,ds = n(\vec{x}(s))\,ds \quad \Rightarrow$$

$$\Delta l = \int_{s_0}^{s_1} n(\vec{x}(s))\, ds$$ — геометрична дължина

Оптичен път: $d\tau = \dot{u}(s)\, ds = \vec{p}^{\,2}(s)\, ds = n^2(\vec{x}(s))\, ds$

$$\Delta \tau = \int_{s_0}^{s_1} n^2(\vec{x}(s))\, ds$$ — оптичен път — времето за което процесът ще се разпространи по пътя от $\vec{x}(s_0)$ до $\vec{x}(s_1)$

Окончателно:

$$\boxed{\begin{aligned} &\ddot{\vec{x}}(s) = n(\vec{x}) \cdot \operatorname{grad}(n(\vec{x})) && \text{— ур. за лъчите} \\ &\Delta l = \int_{s_0}^{s_1} n(\vec{x}(s))\, ds && \text{— геометричен път} \\ &\Delta \tau = \int_{s_0}^{s_1} n^2(\vec{x}(s))\, ds && \text{— оптичен път} \end{aligned}}$$

(2) Еквивалентно уравнение

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{n(\vec{x})} \left(\operatorname{grad}^2(u) - n^2(\vec{x}) \right) = 0, \quad F = \frac{1}{2n(\vec{x})} \left(\vec{p}^{\,2} - n^2(\vec{x}) \right)$$

$$\left| \begin{aligned} \dot{\vec{x}}(s) &= \frac{1}{n(\vec{x})} \vec{p} \\ \dot{\vec{p}}(s) &= \operatorname{grad}(n(\vec{x})) \\ \dot{u}(s) &= \frac{1}{n(\vec{x})} \vec{p}^{\,2} \end{aligned} \right\} \qquad \begin{aligned} &\dot{\vec{x}}(s) \cdot n(\vec{x}) = \vec{p} \\ &\frac{d}{ds}\left(n(\vec{x}) \frac{d\vec{x}}{ds} \right) = \operatorname{grad}(n(\vec{x})) \end{aligned}$$

$$\vec{p}^{\,2} - n^2(\vec{x}) = 0 \to \underline{|\vec{p}| = n(\vec{x})}$$

$$\Rightarrow \frac{d}{ds}\left(n(\vec{x}) \frac{d}{ds} \vec{x} \right) = \operatorname{grad}(n(\vec{x}))$$ Уравнение за лъчите

$$dl = |\dot{\vec{x}}(s)|\, ds = \left| \frac{1}{n(\vec{x})} \vec{p} \right| ds = \frac{1}{n(\vec{x}(s))} \cdot n(\vec{x}(s)) \cdot ds = ds$$

s е естествен параметър относно геометричната дължина

$$\Delta l = \int_{s_0}^{s_1} ds = s_1 - s_0$$

$$d\tau = \dot{u}(s)\, ds = \frac{1}{n(\vec{x}(s))} \cdot \vec{p}^{\,2}(s)\, ds = \frac{n^2(\vec{x}(s))}{n(\vec{x}(s))}\, ds = n(\vec{x}(s))\, ds$$

$$\Delta T = \int_{s_0}^{s_1} n(\vec{x}(s))\, ds$$ — оптичен път

Окончателно

$$\frac{d}{ds}\left(\vec{n}(\vec{x})\frac{d}{ds}\vec{x}\right) = grad(n(\vec{x})) \text{ - Ур. за лъчите}$$

$$\Delta \ell = \int_{s_0}^{s_1} ds = (s_1 - s_2) \text{ - геометричен път. "s" - естествен п.}$$

$$\Delta \tau = \int_{s_0}^{s_1} n(\vec{x}(s))\,ds \text{ - оптичен път}$$

③ Еквивалентно уравнение

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{n^2(\vec{x})}\left(grad^2(u) - n^2(\vec{x})\right) = 0\ ;\ F = \frac{1}{2n^2(\vec{x})}\left(\vec{p}^{\,2} - n^2(\vec{x})\right)$$

$$\left|\begin{array}{l} \dot{\vec{x}}(s) = \dfrac{1}{n^2(\vec{x})}\,\vec{p} \\ \dot{\vec{p}}(s) = \dfrac{1}{n(\vec{x})}\,grad(n(\vec{x})) \\ \dot{u}(s) = \dfrac{1}{n^2(\vec{x})}\cdot\vec{p}^{\,2} \end{array}\right\} \quad \begin{array}{l} n^2(\vec{x}).\,\dot{\vec{x}}(s) = \vec{p}(s) \\ \dfrac{d}{ds}\left(n^2(\vec{x}).\dfrac{d}{ds}\vec{x}(s)\right) = \\ = \dfrac{1}{n(\vec{x})}\cdot grad(n(\vec{x})) \end{array}$$

$$\vec{p}^{\,2} - n^2(\vec{x}) = 0 \rightarrow |\vec{p}| = n(\vec{x})$$

$$\Rightarrow \frac{d}{ds}\left(n^2(\vec{x})\frac{d}{ds}\vec{x}\right) = \frac{1}{n(\vec{x})}\cdot grad(n(\vec{x})) \quad \text{Ур. за лъчите}$$

$$d\ell = |\dot{\vec{x}}(s)|\,ds = \frac{1}{n^2(\vec{x}(s))}|\vec{p}(s)|\,ds = \frac{n(\vec{x}(s))}{n^2(\vec{x}(s))}ds = \frac{1}{n(\vec{x}(s))}ds$$

$$\Delta \ell = \int_{s_0}^{s_1}\frac{1}{n(\vec{x}(s))}ds \text{ - геометричен път}$$

$$d\tau = |\dot{u}(s)|\,ds = \frac{1}{n^2(\vec{x}(s))}|\vec{p}(s)|\,ds = \frac{n^2(\vec{x}(s))}{n(\vec{x}(s))}ds = ds$$

$$\Delta \tau = \int_{s_0}^{s_1} ds = (s_1 - s_0) \text{ - оптичен път , s. е естествен. пар.}$$

$$\frac{d}{ds}\left(n^2(\vec{x}(s))\frac{d}{ds}\vec{x}(s)\right) = \frac{1}{n(\vec{x})}\cdot grad(n(\vec{x})) \text{ - Ур. за лъчите.}$$

$$\Delta \ell = \int_{s_0}^{s_1}\frac{1}{n(\vec{x}(s))}ds \text{ - геометричен път}$$

$$\Delta \tau = \int_{s_0}^{s_1} ds = (s_1 - s_0) \text{ - оптичен път , s е естествен парам.}$$

Задача

Намерете решение $u = u(x_1, x_2)$ на уравнението $\frac{1}{2}(\partial_1 u)^2 + \partial_2 u - \frac{1}{2}x_1^2 = 0$, удовлетвор. условието на Коши

$u(t, 0) = 0$

Решение

$$F = \frac{1}{2}p_1^2 + p_2 - \frac{1}{2}x_1^2$$

① Начална ивица

$$\left|\begin{array}{l} p_1 \cdot 1 + p_2 \cdot 0 = 0 \\ \frac{1}{2}p_1^2 + p_2 - \frac{1}{2}t^2 = 0 \end{array}\right\} \begin{array}{l} \to p_1 = 0 \\ \to p_2 = \frac{1}{2}t^2 \end{array}$$

$$x_1(t) = t, \ x_2(t) = 0, \ u_0(t) = 0, \ p_1(t) = 0, \ p_2(t) = \frac{1}{2}t^2$$

② Система на Лагранж-Шарпи

$$\left|\begin{array}{lll} \to & \dot{x}_1(s) = p_1 & x_1 = \alpha_1 e^{s} + \beta_1 e^{-s} \\ & \dot{x}_2(s) = 1 & \to x_2 = s + \alpha_2 \\ & \dot{u}(s) = p_1^2 + p_2 & \to \dot{u} = \alpha_1^2 e^{2s} + \beta_1^2 e^{-2s} - 2\alpha_1\beta_1 + \beta_2 \\ \to & \dot{p}_1(s) = x_1 & \to p_1 = \alpha_1 e^{s} - \beta_1 e^{-s} \\ & \dot{p}_2(s) = 0 & \to p_2 = \beta_2 \end{array}\right.$$

$$\left|\begin{array}{l} x_1 = \alpha_1 e^{s} + \beta_1 e^{-s} \\ x_2 = s + \alpha_2 \\ u = \frac{1}{2}\alpha_1^2 e^{2s} - \frac{1}{2}\beta_1^2 e^{-2s} + (\beta_2 - 2\alpha_1\beta_1)s + \gamma \\ p_1 = \alpha_1 e^{s} - \beta_1 e^{-s} \\ p_2 = \beta_2 \end{array}\right.$$

③ Начални условия при $s = 0$

$$\left|\begin{array}{l} \alpha_1 + \beta_1 = t \\ \alpha_2 = 0 \\ \frac{1}{2}(\alpha_1^2 - \beta_1^2) + \gamma = 0 \\ \alpha_1 - \beta_1 = 0 \\ \beta_2 = \frac{1}{2}t^2 \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} \alpha_1 = \frac{1}{2}t \\ \alpha_2 = 0 \\ \gamma = 0 \\ \beta_1 = \frac{1}{2}t \\ \beta_2 = \frac{1}{2}t^2 \end{array}\right\} \Rightarrow \left|\begin{array}{l} x_1 = t\,ch(s) \\ x_2 = s \\ u = \frac{t^2}{4}sh(2s) + \left(\frac{1}{2}t^2 - 2\frac{t^2}{4}\right)s \\ p_1 = t\,sh(s) \\ p_2 = \frac{1}{2}t^2 \end{array}\right.$$

(4)

$$\left|\begin{array}{l} x_1 = t\,\mathrm{ch}(s) \\ x_2 = s \end{array}\right\} \Rightarrow \left|\begin{array}{l} s = x_2 \\ t = \dfrac{x_1}{\mathrm{ch}(x_2)} \end{array}\right.$$

(5) $$u(x_1,x_2) = \frac{1}{4}\left(\frac{x_1}{\mathrm{ch}(x_2)}\right)^2 \cdot \mathrm{sh}(2x_2) =$$

$$= \frac{1}{4}\,\frac{x_1^2}{(\mathrm{ch}(x_2))^{\cancel{2}}}\cdot 2\,\mathrm{sh}(x_2)\cdot\cancel{\mathrm{ch}(x_2)} = \frac{x_1^2}{2}\,\mathrm{th}(x_2)$$

$$\Rightarrow u(x_1,x_2) = \frac{x_1^2}{2}\cdot\mathrm{th}(x_2) = \frac{x_1^2}{2}\,\frac{e^{x_2}-e^{-x_2}}{e^{x_2}+e^{x_2}}$$

Задачи.

$$\ln(x_2)\,\partial_1 u + x_2\,u\,\partial_2 u - u = 0 \quad ; \quad u(t+1, e) = 1 \quad ; \quad x_2 > 0$$

$$u(x_1,x_2) = \ln(x_2)$$ (04.09.1993)

$$\frac{1}{2}(\partial_1 u)^2 + \partial_2 u - x_2 - u = 0 \quad ; \quad u(t,0) = 0$$

$$u(x_1,x_2) = e^{x_2} - x_2 - 1$$ (26.06.1998)

$$\ln(\partial_1 u) + x_2\,\partial_1 u + \partial_2 u = 0 \quad ; \quad u(t,0) = t$$

$$u(x_1,x_2) = x_1 - \frac{1}{2}x_2^2$$ (01,09,1999)

$$\frac{1}{2}(\partial_1 u)^2 + \partial_2 u - \frac{1}{2}(x_1^2 + x_2^2) = 0 \quad ; \quad u(t,0) = 0$$

$$u(x_1,x_2) = \frac{1}{4}x_1^2\,\mathrm{th}(x_2) + \frac{1}{6}x_2^3$$ (23,06,2000)

$$x_1\,\partial_2 u + \partial_1 u\cdot\partial_2 u = 0 \quad ; \quad u(0,t) = e^t$$

$$u(x_1,x_2) = -\frac{1}{2}x_1^2 + e^{x_2}$$ (26.06.2001)

$$e^{(\partial_1 u)} + \partial_2 u - x_1 - \frac{1}{2} x_2^2 = 0 \quad ; \quad u(t+1, 0) = 1$$

$$u(x_1, x_2) = -e^{x_2} + \frac{1}{6} x_2^3 + x_1 \cdot x_2 + 2$$ (13.06.2002)

$$e^{(\partial_1 u)} + x_2 \partial_2 u - x_1 = 0 \quad ; \quad u(t+1, 1) = 0$$

$$u(x_1, x_2) = x_1 \ln x_2 - x_2 + 1$$ (23.06.2003)

✓ $$e^{(\partial_1 u)} + x_1 \partial_1 u - \ln(\partial_2 u) - u = 0 \quad ; \quad u(t, 0) = t + e$$

$$u(x_1, x_2) = x_1 + e + \ln(x_2 + 1)$$ (09.09.2003)

$$\ln(\partial_1 u) + x_2 \partial_2 u + u = 0 \quad ; \quad u(t+1, 1) = t$$

$$u(x_1, x_2) = \ln(x_2) + \frac{x_1}{x_2} - 1$$ (08.07.2004)

$$\ln(\partial_1 u) + e^{(\partial_2 u)} - x_1 = 0 \quad ; \quad u(t+1, 1) = e^t$$

$$u(x_1, x_2) = e^{(x_1 - 1)}$$ (09.09.2005)

$$x_1 \cdot \partial_1 u + e^{(\partial_2 u)} - x_2 = 0 \quad ; \quad u(1, t+1) = 0$$

$$u(x_1, x_2) = (x_2 - x_1) \ln(x_1) + (\ln(x_1) - 1) \cdot x_1 + 1$$, (27.06.2004)

Метод на обвивките (пълен интеграл)

Обща постановка

$F(x_1, x_2, u, \partial_1 u, \partial_2 u) = 0$ - ЧДУ

$u(x_1(t), x_2(t)) = u_0(t)$ - условие на Коши

$u = \varphi(x_1, x_2, a, b)$ - пълен интеграл.

За намиране на решението $u = u(x_1, x_2)$.

① Намираме еднопараметрична фамилия решения от алгебричната система

$$\begin{cases} \varphi(x_1(t), x_2(t), a, b) = u_0(t) \\ \partial_{x_1}\varphi(x_1(t), x_2(t), a, b) \cdot \dot{x}_1(t) + \partial_{x_2}\varphi \cdot \dot{x}_2(t) = \dot{u}_0(t) \end{cases}$$

От трите променливи: (t, a, b) изключваме две.
Ако примерно оставим a, ($t = t(a)$, $b = b(a)$),
еднопараметричната фамилия е

$f(x_1, x_2, a) = \varphi(x_1, x_2, a, b(a))$

② Намираме обвивката на получената еднопараметрична фамилия

$$\begin{cases} u = f(x_1, x_2, a) \\ 0 = \partial_a f(x_1, x_2, a) \end{cases}$$

Задача

Намерете решение $u = u(x_1, x_2)$ на уравнението
$(\partial_1 u)^2 + \partial_2 u - x_2 = 0$, удовлетвор. усл. на Коши.

$u(t, 0) = \frac{1}{2} t^2$

Пълен интеграл: $u = a x_1 + \frac{1}{2} x_2^2 - a^2 x_2 + b$

Решение

$x_1(t) = t$, $x_2(t) = 0$, $u_0(t) = \frac{1}{2} t^2$

Проверяваме ли това е пълен интеграл:

$a^2 + x_2 - a^2 - x_2 = 0$

① Намираме еднопараметричната фамилия

$$\left|\begin{array}{l} at + b = \frac{1}{2}t^2 \longleftrightarrow a^2 + b = \frac{1}{2}a^2 \to b = -\frac{1}{2}a^2 \\ a.1 + (\cdot\cdot).0 = t \to t = a \end{array}\right.$$

$$\Rightarrow u = a x_1 + \frac{1}{2}x_2^2 - a^2 x_2 - \frac{1}{2}a^2 = a x_1 + \frac{1}{2}x_2^2 - \frac{1}{2}a^2(1+2x_2)$$

② Намираме обвивката

$$\left|\begin{array}{l} u = a x_1 + \frac{1}{2}x_2^2 - \frac{1}{2}a^2(1+2x_2) \\ 0 = x_1 - a(1+2x_2) \longrightarrow a = \dfrac{x_1}{1+2x_2} \end{array}\right.$$

$$u = \frac{x_1^2}{1+2x_2} + \frac{1}{2}x_2^2 - \frac{1}{2}\frac{x_1^2}{(1+2x_2)^2}\cancel{(1+2x_2)}$$

$$u = \frac{1}{2}\frac{x_1^2}{1+2x_2} + \frac{1}{2}x_2^2$$

Задача.

Намерете решение $u = u(x_1, x_2)$ на уравнението $(\partial_1 u)^2 - \partial_2 u + 2 + e^{(x_2)} = 0$, удовлетвор. усл. на Коши $u(t,0) = t^2$ като се използвате от пълния интеграл

$$u = a x_1 + (a^2+2)x_2 + e^{x_2} + b$$

Решение

$x_1(t) = t$, $x_2(t) = 0$, $u_0(t) = t^2$

Проверяване: $a^2 - (a^2+2) + e^{x_2} + 2 + e^{x_2} = 0$

① Намираме еднопараметричната фамилия

$$\left|\begin{array}{l} at + 1 + b = t^2 \longleftrightarrow \frac{a^2}{2} + 1 + b = \frac{a^2}{4} \Rightarrow b = -\frac{1}{4}a^2 - 1 \\ a.1 + (\cdots).0 = 2t \longrightarrow t = \frac{a}{2} \end{array}\right.$$

$$\Rightarrow u = a x_1 + (a^2+2)x_2 + e^{x_2} - \frac{1}{4}a^2 - 1$$

, еднопараметричната фамилия

② Намираме обвивката

$$\begin{cases} u = a x_1 + (a^2+2) x_2 + e^{x_2} - \frac{1}{4} a^2 - 1 \\ 0 = x_1 + 2a x_2 - \frac{1}{2} a \longrightarrow 0 = x_1 + \frac{1}{2} a (4x_2 - 1) \end{cases}$$

$$\Rightarrow a = \frac{2x_1}{1-4x_2}$$

$$\Rightarrow u = \frac{2x_1^2}{1-4x_2} + \left(\frac{4x_1^2}{(1-4x_2)^2} + 2 \right) x_2 + e^{x_2} - \frac{4x_1^2}{4(1-4x_2)^2} - 1$$

Коментар
$$\left| u = \frac{x_1^2}{1-4x_2} + 2x_2 + e^{x_2} - 1 \right.$$

Важно е да се намери еднопараметричната фамилия, без значение какво е конкретната параметризация. За параметър може да бъде избран и "в" и "t"

Примерно

$$\begin{cases} at + 1 + b = t^2 \longrightarrow 2t^2 + 1 + b = t^2 \Rightarrow b = -t^2 - 1 \\ a = 2t \longrightarrow a = 2t \end{cases}$$

$$\Rightarrow u = 2t x_1 + (4t^2+2) x_2 + e^{x_2} - t^2 - 1$$

Това е същата еднопараметрична фамилия, но параметризирана по друг начин. Сега за параметър е избран "t". Обвивката е същата

$$\begin{cases} u = 2t x_1 + (4t^2+2) x_2 + e^{x_2} - t^2 - 1 \\ 0 = 2x_1 + 8t x_2 - 2t \longrightarrow t = \frac{x_1}{1-4x_2} \end{cases}$$

$$u = \frac{2x_1^2}{1-4x_2} + \left(\frac{4x_1^2}{(1-4x_2)^2} + 2 \right) x_2 + e^{x_2} - \frac{x_1^2}{(1-4x_2)^2} - 1$$

$$\frac{1}{(1-4x_2)^2} \left[2x_1^2 (1-4x_2) + 4x_1^2 x_2 + 2x_2 (1-4x_2)^2 - x_1^2 \right] + e^{x_2} - 1 =$$

$$= \frac{1}{(1-4x_2)^2} \left[x_1^2 (1-4x_2) + 2x_2 (1-4x_2)^2 \right] + e^{x_2} - 1 \qquad \text{и.т.н.}$$

Задача

Намерете решение $u = u(x_1, x_2)$ на уравнението

$(\partial_1 u)^2 + x_1 \partial_1 u - x_2 \partial_2 u + 2u = 0$, удовлетвор. усл. на Коши

$u(t, 1) = 1$, като се възползвате от пълния интеграл

$$u = a x_2^2 - \left(x_1 + \frac{b}{x_2}\right)^2$$

Решение

$x_1(t) = t, \quad x_2(t) = 1, \quad u_0(t) = 1$

Проверяваме

$$\left(-2\left(x_1 + \frac{b}{x_2}\right)\right)^2 + x_1 . (-2)\left(x_1 + \frac{b}{x_2}\right) - x_2\left(2a x_2 - 2\left(x_1 + \frac{b}{x_2}\right)\frac{-b}{x_2^2}\right) +$$

$$+ 2a x_2^2 - 2\left(x_1 + \frac{b}{x_2}\right)^2 = 0 \; ; (?)$$

$$4\left(x_1 + \frac{b}{x_2}\right)^2 - 2x_1\left(x_1 + \frac{b}{x_2}\right) \cancel{-2a x_2^2} - 2\frac{b}{x_2}\left(x_1 + \frac{b}{x_2}\right) \cancel{+2a x_2^2} - 2\left(x_1 + \frac{b}{x_2}\right)^2 =$$

$$= \left(x_1 + \frac{b}{x_2}\right)\left(\cancel{4x_1} + \cancel{\frac{4b}{x_2}} - \cancel{2x_1} - \cancel{\frac{2b}{x_2}} - \cancel{2x_1} - \frac{2b}{x_2}\right) = 0$$

① Намираме еднопараметричната фамилия

$$\left| \begin{array}{l} a - (t + b) = 1 \\ -2(t + b) . 1 + (\dots) . 0 = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \left| \begin{array}{l} a - (t + b) = 1 \\ t + b = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{array}{l} a = 1 \\ -t = b \end{array}$$

Избираме за параметър "b"

$$\Rightarrow u = x_2^2 - \left(x_1 + \frac{b}{x_2}\right)^2$$ – Еднопараметричната фамилия

② Намираме обвивката

$$\left| \begin{array}{l} u = x_2^2 - \left(x_1 + \dfrac{b}{x_2}\right)^2 \\ 0 = -2\left(x_1 + \dfrac{b}{x_2}\right)\dfrac{1}{x_2} \end{array} \right. \rightarrow x_1 + \frac{b}{x_2} = 0 \rightarrow b = -x_1 x_2$$

$$u = x_2^2 - \left(x_1 - \frac{x_1 x_2}{x_2}\right)^2 = x_2^2 \quad \Rightarrow \quad u(x_1, x_2) = x_2^2$$

Задачи:

$$(\partial_1 u)^2 + c.\partial_2 u - d.x_2 = 0 \quad ; \quad u(t,0) = \frac{1}{2}t^2 \quad ; \; c, d \text{ - константи}$$

$$u = a x_1 + \frac{d}{2c} x_2^2 + \frac{a^2}{c} x_2 + b \quad \text{- пълен интеграл}$$

$$u(x_1, x_2) = \frac{c}{2} \frac{x_1}{c + 2x_2} + \frac{d}{2c} x_2^2$$

(06.07.1994)
(може и с характ. система)

$$(\partial_1 u)^2 + (\partial_2 u)^2 - 4(x_1 \partial_1 u + x_2 \partial_2 u - u) = 0 \quad ; \quad u(0, \frac{1}{2}t) = \frac{1}{4}t^2$$

$$u = a x_1 - b x_2 - \frac{1}{4}(a^2 - b^2) \quad \text{- пълен интеграл}$$

$$u(x_1, x_2) = 2\left(x_1 \pm \frac{1}{\sqrt{2}} x_2\right)^2,$$

(може и с характ. система)

Задачата има две решения (27.06.1996)

Допълнителен материал

"Развиващи се повърхнини" в $\mathbb{R}^3$ - това са обвивките на еднопараметрични фамилии от равнини.
Развиващите се повърхнини са изтъкани от прави - пресечниците на безкрайно-близки равнини от еднопараметричната фамилия.
Развиващите се повърхнини могат изометрично да се "развият" и превърнат в равнина. В $\mathbb{R}^3 \ni (x, y, u)$, в "общо положение" еднопараметрична фамилия от равнини се задава с: $[u = ax + by + c]$

$$u = ax + \omega(a) y + V(a) \quad ; \quad \omega(a), V(a) \text{ - функции на } a$$

Обвивката се задава с уравненията; изключваме a.

$$\left| \begin{array}{l} u = ax + \omega(a) y + V(a) \\ 0 = x + \omega'(a) y + V'(a) \quad \rightarrow \quad a = a(x, y) \end{array} \right.$$

(т.е. $x + \omega'(a(x,y)).y + V'(a(x,y)) = 0$)

развиваща се повърхнина. До всяка точка от повърхнината съществува равнина която освен това е допирателна до повърхнината по протежение на цяла права

$$u = a(x,y)\cdot x + \omega(a(x,y))\cdot y + V(a(x,y))$$

развиващата се повърхнина е графиката на функцията $u = u(x,y)$. Това е "общо положение".

Задача

Намерете диференциалното уравнение което удовлетворява функция $u = u(x,y)$ ако нейният график е развиваща се повърхнина.

Нека $u = u(x,y)$ определя развиваща се повърхнина

$$u = a(x,y)\cdot x + \omega(a(x,y))\cdot y + V(a(x,y)) \quad \left(\text{от предишното разглеждане}\right)$$

$$\partial_x u = a(x,y) + \underbrace{\left(x + \omega'(a(x,y))\cdot y + V'(a(x,y))\right)}_{=0} \partial_x a(x,y) = a(x,y)$$

$$\partial_y u = \omega(a(x,y)) + \underbrace{\left(x + \omega'(a(x,y))\cdot y + V'(a(x,y))\right)}_{=0} \partial_y a(x,y) = \omega(a(x,y))$$

$$\partial_y u = \omega(a(x,y)) = \omega(\partial_x u(x,y)) \quad ; \text{от } a(x,y) = \partial_x u(x,y)$$

$$\left.\begin{aligned} \partial_y \partial_y u(x,y) &= \omega'(\partial_x u(x,y))\cdot \partial_y \partial_x u(x,y) \\ \partial_x \partial_y u(x,y) &= \omega'(\partial_x u(x,y))\cdot \partial_x \partial_x u(x,y) \end{aligned}\right\} \Rightarrow \frac{\partial_y \partial_y u}{\partial_x \partial_y u} = \frac{\partial_y \partial_x u}{\partial_x \partial_x u}$$

$$\Rightarrow \partial_x \partial_x u(x,y)\cdot \partial_y \partial_y u(x,y) - \left(\partial_x \partial_y u(x,y)\right)^2 = 0$$

Функциите чиито графики са изтъкани от прави удовлетворяват това уравнение. Обратното също е вярно. Изразът е гаусовата кривина на повърхността, когато тя е представена като график на функцията u.

Обвивка на двупараметрична фамилия повърхнини в $\mathbb{R}^3 \ni (x_1, x_2)$

$$\left| \begin{aligned} u &= \varphi(x_1, x_2, a_1, a_2) \\ 0 &= \partial_a \varphi(x_1, x_2, a_1, a_2) \\ 0 &= \partial_b \varphi(x_1, x_2, a_1, a_2) \end{aligned} \right\} \quad \text{Изключване } a_1, a_2$$

Частен случай – двупараметрична фамилия от равнини. В общо положение

$$u = \xi_1 x_1 + \xi_2 x_2 - \omega(\xi_1, \xi_2)$$

Графикът на афинната функция е равнина. За параметри избираме ξ_1, ξ_2 – коефициентите пред x_1, x_2. При този фиксиран избор различните еднопараметрични фамилии се определят от функцията $\omega(\xi_1, \xi_2)$. Обвивката е графика на функцията $u = u(x_1, x_2)$ определена от уравнението, след изключване на ξ_1, ξ_2

$$\left| \begin{aligned} u &= \xi_1 x_1 + \xi_2 x_2 - \omega(\xi_1, \xi_2) \\ 0 &= x_1 - \partial_{\xi_1} \omega(\xi_1, \xi_2) \\ 0 &= x_2 - \partial_{\xi_2} \omega(\xi_1, \xi_2) \end{aligned} \right.$$

Това е съответствие при което функцията $\omega(\xi_1, \xi_2)$ определя една нова функция $u(x_1, x_2)$

$(\omega(\xi_1, \xi_2) \longrightarrow u(x_1, x_2))$

Обратно. Нека е зададена функция $u = u(x_1, x_2)$. Тя определя двупараметрична фамилия от равнини на които тя е обвивка – това са допирателните равнини към точките от графика на u.

Описание на двупараметричните фамилии допирателни равнини: Първоначални параметри: (x_1, x_2)

$(x_1, x_2) \to (x_1, x_2, u(x_1, x_2)) \in \tilde{U} \to$ равнина допирателна към $\tilde{U}$ в точката $(x_1, x_2, u(x_1, x_2))$

$\vec{n} = (\partial_{x_1} u(x_1, x_2), \partial_{x_2} u(x_1, x_2), -1)$ – нормален вектор

$$\bar{u} - u(x_1, x_2) = \partial_{x_1} u(x_1, x_2)(\bar{x}_1 - x_1) + \partial_{x_2} u(x_1, x_2)(\bar{x}_2 - x_2)$$

$(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{u})$ са текущите координати

$$\bar{u} = \partial_{x_1} u(x_1, x_2) . \bar{x}_1 + \partial_{x_2} u(x_1, x_2) . \bar{x}_2 - x_1 \partial_{x_1} u - x_2 \partial_{x_2} u + u$$

Това е уравнението определящо допирателната равнина към $\tilde{U}$ в точката $(x_1, x_2, u(x_1, x_2))$.

Искаме да запишем тази двупараметрична фамилия равнини (параметри x_1, x_2) в канонична форма:

$$\bar{u} = \xi_1 . \bar{x}_1 + \xi_2 . \bar{x}_2 - \omega(\xi_1, \xi_2)$$

където параметри са коефициентите ξ_1, ξ_2 пред текущите аргументи $\bar{x}_1, \bar{x}_2$. Трябва да положим

$$\left| \begin{array}{l} \xi_1 = \partial_{x_1} u(x_1, x_2) \\ \xi_2 = \partial_{x_2} u(x_1, x_2) \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{array}{l} x_1 = x_1(\xi_1, \xi_2) \\ x_2 = x_2(\xi_1, \xi_2) \end{array}$$

Тогава общата двупараметрична фамилия се записва в канонична форма

$$\bar{u} = \xi_1 \bar{x}_1 + \xi_2 \bar{x}_2 - \omega(\xi_1, \xi_2)$$

където $\omega(\xi_1, \xi_2) = x_1 \partial_{x_1} u(x_1, x_2) + x_2 \partial_{x_2} u(x_1, x_2) - u(x_1, x_2)$

$\omega(\xi_1, \xi_2) = x_1 \xi_1 + x_2 \xi_2 - u(x_1, x_2)$

като в дясната страна е заместено: $x_1 = x_1(\xi_1, \xi_2)$, $x_2 = x_2(\xi_1, \xi_2)$. Съответствието $u(x, y) \to \omega(\xi_1, \xi_2)$ е определено от системата

$$\left| \begin{array}{l} \xi_1 = \partial_{x_1} u(x_1, x_2) \\ \xi_2 = \partial_{x_2} u(x_1, x_2) \\ \omega = x_1 \partial_{x_1} u(x_1, x_2) + x_2 \partial_{x_2} u(x_1, x_2) - u(x_1, x_2) \end{array} \right\}$$

като изключим x_1, x_2.

Симетричен запис $\quad u + w = \xi_1 x_1 + \xi_2 x_2$

$$\boxed{\begin{array}{l} u(x_1,x_2) + w(\xi_1,\xi_2) = \xi_1 x_1 + \xi_2 x_2 \\ \left| \begin{array}{l} x_1 = \partial_{\xi_1} w(\xi_1,\xi_2) \\ x_2 = \partial_{\xi_2} w(\xi_1,\xi_2) \end{array} \right| \begin{array}{l} \xi_1 = \partial_{x_1} u(x_1,x_2) \\ \xi_2 = \partial_{x_2} u(x_1,x_2) \end{array} \end{array}}$$

Условие за съществуване

$$\left| \begin{array}{l} \xi_1 = \partial_{x_1} u(x_1,x_2) \\ \xi_2 = \partial_{x_2} u(x_1,x_2) \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{D(\xi_1,\xi_2)}{D(x_1,x_2)} = \begin{vmatrix} \partial_1\partial_1 u & \partial_2\partial_1 u \\ \partial_1\partial_2 u & \partial_2\partial_2 u \end{vmatrix} =$$

$$= \partial_1^2 u \cdot \partial_2^2 u - (\partial_1\partial_2 u)^2 \neq 0$$

Графикът на u да не е развиваща се повърхнина

Ако $\tilde{u}$ е развиваща се повърхнина, допирателните повърхнини към $\tilde{u}$ се допират до цяла права линия в $\tilde{u}$ и са еднопараметрично фамилия.

Обобщението за n-променливи е:

$$\boxed{\begin{array}{l} u(x_1,\dots,x_n) + w(\xi_1,\dots,\xi_n) = \xi_1 \cdot x_1 + \dots + \xi_n \cdot x_n \\ \left| \begin{array}{l} x_1 = \partial_{\xi_1} w(\xi_1 \dots \xi_n) \\ \vdots \\ x_n = \partial_{\xi_n} w(\xi_1 \dots \xi_n) \end{array} \right| \begin{array}{l} \xi_1 = \partial_{x_1} u(x_1,\dots,x_n) \\ \vdots \\ \xi_n = \partial_{x_n} u(x_1,\dots,x_n) \end{array} \end{array}}$$

Това е преобразуване на Лежандър

Връзка между вторите производни

$$\begin{bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \partial_{x_1} u(x_1(\xi_1,\xi_2), x_2(\xi_1,\xi_2)) \\ \partial_{x_2} u(x_1(\xi_1,\xi_2), x_2(\xi_1,\xi_2)) \end{bmatrix}$$

Изчисляваме матрицата $\frac{D(\xi_1,\xi_2)}{D(\xi_1,\xi_2)} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

$$\begin{bmatrix} \partial_{x_1}\partial_{x_1} u & \partial_{x_2}\partial_{x_1} u \\ \partial_{x_1}\partial_{x_2} u & \partial_{x_2}\partial_{x_2} u \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \partial_{\xi_1} x_1 & \partial_{\xi_2} x_1 \\ \partial_{\xi_1} x_2 & \partial_{\xi_2} x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\begin{bmatrix} \partial_{x_1}\partial_{x_1}u & \partial_{x_2}\partial_{x_1}u \\ \partial_{x_1}\partial_{x_2}u & \partial_{x_2}\partial_{x_2}u \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \partial_{\xi_1}\partial_{\xi_1}\omega & \partial_{\xi_2}\partial_{\xi_1}\omega \\ \partial_{\xi_1}\partial_{\xi_2}\omega & \partial_{\xi_2}\partial_{\xi_2}\omega \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

взаимно обратни матрици.

$$\rho = \begin{vmatrix} \partial^2_{\xi_1}\omega & \partial_{\xi_1}\partial_{\xi_2}\omega \\ \partial_{\xi_1}\partial_{\xi_2}\omega & \partial^2_{\xi_2}\omega \end{vmatrix} = \partial^2_{\xi_1}\omega \cdot \partial^2_{\xi_2}\omega - (\partial_{\xi_1}\partial_{\xi_2}\omega)^2$$

Обратната матрица е

$$\frac{1}{\rho}\begin{bmatrix} \partial^2_{\xi_2}\omega & -\partial_{\xi_1}\partial_{\xi_2}\omega \\ -\partial_{\xi_1}\partial_{\xi_2}\omega & \partial^2_{\xi_1}\omega \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \partial^2_{x_1}u & \partial_{x_1}\partial_{x_2}u \\ \partial_{x_1}\partial_{x_2}u & \partial^2_{x_2}u \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left| \begin{aligned} \partial_{x_1}\partial_{x_1}u &= \frac{1}{\rho}\partial_{\xi_2}\partial_{\xi_2}\omega \\ \partial_{x_1}\partial_{x_2}u &= -\frac{1}{\rho}\partial_{\xi_1}\partial_{\xi_2}\omega \\ \partial_{x_2}\partial_{x_2}u &= \frac{1}{\rho}\partial_{\xi_1}\partial_{\xi_1}\omega \end{aligned} \right.$$

При преобразуването на Лежандър уравнението

$F(x_1, x_2, u, \partial_1 u, \partial_2 u) = 0$ преминава в

$F(\partial_1\omega, \partial_2\omega, \xi_1\partial_1\omega + \xi_2\partial_2\omega - \omega, \xi_1, \xi_2) = 0$

<u>Задача</u>

Намерете общото решение на уравнението

$\partial_{x_1}u \cdot \partial_{x_2}u = x_1$

<u>Решение</u>

При преобразуване на Лежандър уравнението се трансформира в:

$\xi_1 \cdot \xi_2 = \partial_{\xi_1}\omega(\xi_1, \xi_2) \Rightarrow \omega(\xi_1, \xi_2) = \frac{1}{2}\xi_1^2\xi_2 + f(\xi_2)$

където f е произволна функция на една променлива.

Обратно преобразувание на Лежандър

$$\begin{cases} x_1 = \xi_1 \xi_2 \\ x_2 = \frac{1}{2}\xi_1^2 + f'(\xi_2) \\ u = \xi_1 x_1 + \xi_2 x_2 - \left(\frac{1}{2}\xi_1^2 \xi_2 + f(\xi_2)\right) \end{cases}$$

$$u = \xi_1^2 \cdot \xi_2 + \cancel{\frac{1}{2}\xi_1^2 \xi_2} + \xi_2 f'(\xi_2) - \cancel{\frac{1}{2}\xi_1^2 \xi_2} - f(\xi_2)$$

$$\left.\begin{cases} x_1 = \xi_1 \xi_2 \\ x_2 = \frac{1}{2}\xi_1^2 + f'(\xi_2) \\ u = \xi_1^2 \xi_2 + \xi_2 f'(\xi_2) - f(\xi_2) \end{cases}\right\}$$

изключваме променливите ξ_1, ξ_2. Конкретният вид зависи от конкретния избор на $f(\xi_2)$

Но тук са изгубени тези решения $u(x_1, x_2)$ за които $\partial_{x_1}^2 u \cdot \partial_{x_2}^2 u - (\partial_{x_1}\partial_{x_2} u)^2 = 0$. За тях преобразуването на Лежандър не е дефинирано. Тези решения могат да се намерят (като се отчита условието $\partial_1^2 u\, \partial_2^2 u = (\partial_1 \partial_2 u)^2$). От:

$$\partial_{x_1} u \cdot \partial_{x_2} u = x_1 \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \partial_1^2 u \cdot \partial_2 u + \partial_1 \partial_2 u \cdot \partial_1 u = 1 \\ \partial_2 \partial_1 u \cdot \partial_2 u + \partial_2^2 u \cdot \partial_1 u = 0 \end{cases}$$

Ако е изпълнено $\partial_1^2 u \cdot \partial_2^2 u - (\partial_1 \partial_2 u)^2 = 0$ $\rightarrow$ левите страни са пропорционални. Това е възможно само ако $\partial_1 \partial_2 u = 0$ & $\partial_2 \partial_2 u = 0$. Тогава

$$\partial_{x_2}\partial_{x_2} u = 0 \Rightarrow u(x_1, x_2) = f(x_1) + g(x_1) \cdot x_2$$

$$\partial_{x_1}\partial_{x_2} u = 0 \Rightarrow g'(x_1) = 0 \rightarrow g(x_1) = a \ \& \ u = f(x_1) + a x_2$$

Но u е решение $\Rightarrow f'(x_1) \cdot a = x_1 \rightarrow f'(x_1) = \frac{x_1}{a} \rightarrow f(x_1) = \frac{x_1^2}{2a} + b$

$$\Rightarrow u(x_1, x_2) = \frac{x_1^2}{2a} + a x_2 + b$$

Това е пълен интеграл

Петко Николов
Упражнения по ЧДУ, ф.з.ф.

Линейни ЧДУ от II ред

Общ вид

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{j=1}^{n} b_j(x)\frac{\partial u}{\partial x_j} + C(x).u = -d(x)$$

$$u = u(x_1, \dots, x_n)$$

Основни въпроси

1. Какво е общото решение в дадена област на решимост? Как да се намери?
2. Какви допълнителни условия трябва да се наложат за да определим еднозначно едно решение?
3. Какви свойства имат решенията?

Коментар

Считаме, че по всяка променлива имаме поне едно диференциране. В противен случай тази променлива може да се разглежда като параметър в уравнението. Например $\partial_{11}u(x_1,x_2,x_3) + \partial_{22}u(x_1,x_2,x_3) = 0$ е елиптично

Задачи

Намерете общото решение на уравнението:

1. $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,y) = 0 \Rightarrow \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial}{\partial x}u\right) = 0 \Rightarrow \frac{\partial u}{\partial x} = f(y) \Rightarrow$

$$u(x,y) = f(y).x + g(y) \quad ; (f \text{ и } g \text{ - произволни})$$

Променливата "y" участва като параметър

$\frac{d^2}{dx^2}u(x) = 0 \Rightarrow u(x) = ax + b \;; \to u(x,y) = f(y).x + g(y)$

константите стават функция от "параметъра" y

2. $\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}(x,y) = 0 \Rightarrow \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right) = 0 \Rightarrow \frac{\partial u}{\partial y}(x,y) = h(y)$

$$u(x,y) = \int h(y)\,dy + f(x) \Rightarrow u(x,y) = f(x) + g(y)$$

3. $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y}(x,y) - \dfrac{\partial u}{\partial x}(x,y) = 0 \Rightarrow \dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{\partial u}{\partial y} - u\right) = 0$

$\dfrac{\partial u}{\partial y}(x,y) - u(x,y) = h(y)$; x – параметър. Получено линейно ОДУ I ред линейно нехомогенно

Общо решение на хомогенното уравнение $\partial_y u(x,y) = u(x,y)$

$\Rightarrow f(x)\,e^{y}$. Частно решение на нехомог. уравнение? $h(y)$ – произволна функция. Всяка функция $g(y)$ е решение на нехомогенното уравнение при подходяща дясна част $\Rightarrow u(x,y) = f(x)e^{y} + g(y)$

Друг начин

Полагаме $\partial_x u(x,y) = v(x,y) \Rightarrow$ уравнението е $\partial_y v(x,y) = v(x,y)$

$\Rightarrow v(x,y) = \tilde{f}(x)\,e^{y} \Rightarrow \partial_x u(x,y) = \tilde{f}(x)e^{y}$

$\Rightarrow u(x,y) = \int \tilde{f}(x)\,e^{y}\,dx + g(y) \longrightarrow f(x)e^{y} + g(y)$

($\tilde{f}$ произволно $\longleftrightarrow$ f произволно)

4. $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t) - \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x,t) = 0$; смяна $\left|\begin{array}{l} \xi = x+t \\ \eta = x-t \end{array}\right.$

"конусни променливи"

$$\left|\begin{array}{l} \dfrac{\partial u}{\partial x} = \dfrac{\partial u'}{\partial \xi} + \dfrac{\partial u'}{\partial \eta} \\[2ex] \dfrac{\partial u}{\partial t} = \dfrac{\partial u'}{\partial \xi} - \dfrac{\partial u'}{\partial \eta} \end{array}\right.$$

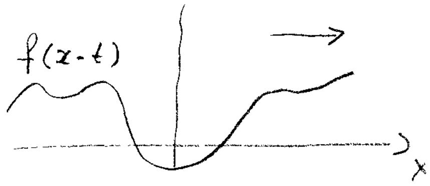
$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u'}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 u'}{\partial \xi\,\partial \eta} + \frac{\partial^2 u'}{\partial \eta\,\partial \xi} + \frac{\partial^2 u'}{\partial \eta^2}$$

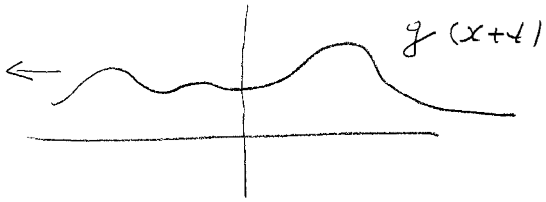
$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u'}{\partial \xi\,\partial \xi} - \frac{\partial^2 u'}{\partial \xi\,\partial \eta} - \frac{\partial^2 u'}{\partial \eta\,\partial \xi} + \frac{\partial^2 u'}{\partial \eta^2}$$

$$\Rightarrow \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 4\,\frac{\partial^2 u'}{\partial \xi\,\partial \eta} = 0 \Rightarrow u'(\xi,\eta) = f(\eta) + g(\xi)$$

$$\Rightarrow u(x,y) = f(x-t) + g(x+t)$$

"физически" това са две вълни: едната се движи надясно, другата наляво





$x - t = const$

$x = t + const$

$x + t = const$

$x = -t + const$

5. $$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0 \Rightarrow \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial (ct)^2} = 0$$

$$\left|\begin{array}{l} x = x \\ \tau = ct \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial \tau^2} = 0 \Rightarrow u(x,\tau) = f(x-\tau) + g(x+\tau)$$

$$\Rightarrow u(x,t) = f(x-ct) + g(x+ct)$$

Скоростта на движещите се вълни е c

Коментар

При ЧДУ от II ред за функция на две променливи общото решение зависи от две произволни функции на 1 променлива.

Класификация

$$p(s) = \begin{vmatrix} a_{11}-s & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-s & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ a_{n1} & a_{n2} & & a_{nn}-s \end{vmatrix}$$

характеристичен полином

$p(s) = 0$ - корените са реални - гледаме знаците на корените и имали нулеви корени

Задачи

Намерете типа на следните уравнения

1. $$2\frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_2} = 0 \Rightarrow a_{ij} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow p(s) = \begin{vmatrix} -s & 1 \\ 1 & -s \end{vmatrix} = s^2 - 1$$

$p(s) = 0 \Rightarrow s^2 - 1 = 0 \Rightarrow s = \pm 1$ - хиперболично уравнение

2. $\partial_{x_1}^2 u + \partial_{x_2}^2 u + \partial_{x_3}^2 u + 6\,\partial_{x_1}\partial_{x_3} u + P(x_\mu, u, \partial_\mu u) = 0$

$u = u(x_1, x_2, x_3)$

$$a_{ij} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad p(s) = \left|\begin{array}{ccc|cc} 1-s & 0 & 3 & 1-s & 0 \\ 0 & 1-s & 0 & 0 & 1-s \\ 3 & 0 & 1-s & 3 & 0 \end{array}\right| =$$

$= (1-s)^3 - 9.(1-s) = (1-s)((1-s)^2 - 9) = 0 \Rightarrow s_1 = 1, \ 1-s = \pm 3$

$\Rightarrow s_1 = 1, \ s_2 = 4, \ s_3 = -2$ – уровнението е хиперболично

3. $\partial_{x_1}^2 u + \partial_{x_2}^2 u + \partial_{x_3}^2 u + 2a\,\partial_{x_1}\partial_{x_3} u = 0$

$$p(s) = \left|\begin{array}{ccc|cc} 1-s & 0 & a & 1-s & 0 \\ 0 & 1-s & 0 & 0 & 1-s \\ a & 0 & 1-s & a & 0 \end{array}\right| = (1-s)^3 - (1-s)a^2 = (1-s)((1-s)^2 - a^2)$$

$p(s) = 0 \Rightarrow (1-s)((1-s)^2 - a^2) = 0 \Rightarrow s_1 = 1, \ s-1 = \pm a$

$$\left.\begin{array}{|l} s_1 = 1 \\ s_2 = 1-a \\ s_3 = 1+a \end{array}\right\}$$

$a < -1$; $a > +1$ → хиперболично

$a \in (-1, +1)$ → елиптично

$a = \pm 1$ → параболично

4. $a\,\partial_x^2 u + 2b\,\partial_x\partial_y u + c\,\partial_y^2 u + P(x, y, u, \partial_x u, \partial_y u)$

$u = u(x,y)$; $a_{ij} = \begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix} \rightarrow p(s) = \begin{vmatrix} a-s & b \\ b & c-s \end{vmatrix}$

$p(s) = (a-s)(c-s) - b^2 = 0 \Rightarrow s^2 - (a+c).s + a.c - b^2 = 0$

$s_{1,2} = \frac{1}{2}\left(a + c \pm \sqrt{(a+c)^2 + 4(b^2 - ac)}\right) = \frac{1}{2}\left(a + c \pm \sqrt{(a-c)^2 + 4b^2}\right)$

корените винаги са реални

1. $b^2 - ac > 0$ → единият корен е положителен, другият е отрицателен → хиперболично
2. $b^2 - ac = 0$ → единият корен е нула → параболично
3. $b^2 - ac < 0$ → двата корена са с еднакъв знак → елиптично
4. $a = b = c = 0$ изроден случай няма ЧДУ от II ред

Задача

Намерете решение $u = u(x,t)$ на уравнението $\partial_x^2 u - \frac{1}{c^2}\partial_t^2 u = 0$ удовлетворяващо условието на Коши

$$\begin{cases} u(x,0) = \varphi(x) \\ \partial_t u(x,0) = \psi(x) \end{cases}$$

Решение

Общото решение е: $u(x,t) = f(x-ct) + g(x+ct)$

функциите f и g трябва така да бъдат подбрани, че да бъдат изпълнени условията

$$\left.\begin{aligned} u(x,0) &= f(x) + g(x) = \varphi(x) \\ \partial_t u(x,0) &= -cf'(x) + cg'(x) = \psi(x) \end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{cases} f'(x) + g'(x) = \varphi'(x) \\ -f'(x) + g'(x) = \frac{1}{c}\psi(x) \end{cases}$$

$$\Rightarrow g'(x) = \frac{1}{2}\left(\varphi'(x) + \frac{1}{c}\psi(x)\right)$$

$$\Rightarrow g(x) = \frac{1}{2}\varphi(x) + \frac{1}{2c}\int_0^x \psi(\xi)\,d\xi + const_1$$

$$f'(x) = \frac{1}{2}\left(\varphi'(x) - \frac{1}{c}\psi(x)\right)$$

$$\Rightarrow f(x) = \frac{1}{2}\varphi(x) - \frac{1}{2c}\int_0^x \psi(\xi)\,d\xi + const_2 =$$

$$= \frac{1}{2}\varphi(x) + \frac{1}{2c}\int_x^0 \psi(\xi)\,d\xi + const_2$$

$$\Rightarrow u(x,t) = f(x-ct) + g(x+ct) =$$

$$= \frac{1}{2}\varphi(x-ct) + \frac{1}{2c}\int_{x-ct}^0 \psi(\xi)\,d\xi + \frac{1}{2}\varphi(x+ct) + \frac{1}{2c}\int_0^{x+ct}\psi(\xi)\,d\xi + const$$

$$\Rightarrow u(x,t) = \frac{1}{2}\varphi(x-ct) + \frac{1}{2}\varphi(x+ct) + \frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct}\psi(\xi)\,d\xi + const$$

От $u(x,0) = \varphi(x) \Rightarrow const = 0$

$$\Rightarrow u(x,t) = \frac{1}{2}\varphi(x-ct) + \frac{1}{2}\varphi(x+ct) + \frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct}\psi(\xi)\,d\xi$$

Ако приемем означенията

$$\left.\begin{array}{l} u(x,0) = u_0(x) \\ \partial_t u(x,0) = V_0(x) \end{array}\right\} \Rightarrow u(x,t) = \frac{1}{2}u_0(x-ct) + \frac{1}{2}u_0(x+ct) + \frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct} V_0(\xi)\,d\xi$$

физическа интерпретация (при $V_0(x) = 0$)

формулировката на Адамар показва че решението е устойчиво. Ако за началните условия имаме $|u_0(x)| < \varepsilon$, $|V_0(x)| < \varepsilon$ $\Rightarrow$

$$|u(x,t)| = \left| \frac{1}{2}u_0(x-ct) + \frac{1}{2}u_0(x+ct) + \frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct} V_0(\xi)\,d\xi \right| \leq$$

$$\leq \frac{1}{2}\varepsilon + \frac{1}{2}\varepsilon + \frac{1}{2c}\cdot 2c.t.\varepsilon = \varepsilon(1+t) \;; \quad t>0$$

За ограничено t решението остава "малко".

Задача

Намерете решение $u = u(x,y)$ на уравнението $\partial_x \partial_y u(x,y) = 0$, удовлетворяващо условието на Коши

$$\left| \begin{array}{l} u(x,0) = \varphi(x) \\ \partial_y u(x,0) = \psi(x) \end{array}\right.$$

Решение

Общото решение е $u(x,y) = f(x) + g(y)$

$$\left.\begin{array}{l} u(x,0) = \varphi(x) \\ \partial_y u(x,0) = \psi(x) \end{array}\right\} \Rightarrow \left| \begin{array}{l} f(x) + g(0) = \varphi(x) \\ g'(0) = \psi(x) \end{array}\right.$$

В общия случай няма решение. Ако специално изберем $\psi(x) = const = c \rightarrow g'(0) = c \rightarrow$

$g(y) = y.c + C_1 + y^2 w(y)$ където $w(y)$ произволна

$\rightarrow f(x) = \varphi(x) - C_1$

решението е $u(x,y) = \varphi(x) + c.y + y^2.w(y)$ - безброй много решения. Кривата $y=0$ е характеристика и задачата на Коши е некоректна.

Пример на Адамар

Разглеждаме елиптично уравнение и задача на Коши

$$u = u(x,t)\ ; \quad \partial_x^2 u + \partial_t^2 u = 0 \ ; \quad \left|\begin{array}{l} u(x,0) = \varphi(x) \\ \partial_t u(x,0) = \psi(x) \end{array}\right.$$

Тази задача на Коши определя едно единствено решение.

Разглеждаме множеството от решения

$$u(x,t) = e^{-\sqrt{n}} . \sin(nx) . e^{nt} \ , \quad n = 1,2,3,\dots$$

Те удовлетворяват условията на Коши

$$\left|\begin{array}{l} u(x,0) = e^{-\sqrt{n}} . \sin(nx) \\ \partial_t u(x,0) = n . e^{-\sqrt{n}} . \sin(nx) \end{array}\right.$$

За началните условия са в сила оценките

$$|e^{-\sqrt{n}} . \sin(nx)| \le e^{-\sqrt{n}} \to 0 \quad \text{при } n \to \infty$$

$$|n . e^{-\sqrt{n}} . \sin(nx)| \le n e^{-\sqrt{n}} \to 0 \quad \text{при } n \to \infty$$

В същото време

$$|u(x,t)| = |e^{-\sqrt{n}} . \sin(nx) . e^{nt}| = |\sin(nx)| e^{-\sqrt{n}} . e^{nt} \xrightarrow[n\to\infty]{} +\infty$$

за точките x при които $\sin(nx) \neq 0$; $t > 0$

Ако фиксираме област на решимост $(x,t) \in \mathbb{R} \times [0, t_0]$, $t_0 > 0$, получаваме, че за всяко положително число $\varepsilon > 0$ съществуват начални условия $\varphi(x), \psi(x)$;

$|\varphi(x)| \le \varepsilon$ & $|\psi(x)| \le \varepsilon$ такива че решението $u(x,t)$ приема произволно големи стойности в областта на решимост. Т.е. "безкрайно малки начални данни" могат да определят решение с "безкрайно големи" стойности $u(x,t)$ за крайно t.

Прието е задачата на Коши да се нарича коректна, ако:
1. определя едно единствено решение
2. решението е устойчиво.

Привеждане в канонична форма

Постановка: $u = u(x,y)$,

$$a(x,y)\,\partial_x^2 u + 2b(x,y)\,\partial_x\partial_y u + c(x,y)\,\partial_y^2 u + P(x,y,u,\partial_x u,\partial_y u) = 0$$

$\begin{bmatrix} a, & b \\ b, & c \end{bmatrix}$ – матрица пред вторите производни

$$\left| \begin{array}{ll} b^2 - a.c > 0 & \text{– хиперболично} \\ b^2 - a.c = 0 & \text{– параболично} \\ b^2 - a.c < 0 & \text{– елиптично} \end{array} \right.$$

Нека $b^2 - a.c > 0$ – хиперболичен случай $\Rightarrow$

$$a\,\dot{y}(x) - 2b\,\dot{y}(x) + c = 0$$

$$\left| \begin{array}{l} \dot{y}_1(x) = \frac{1}{a}\left(b + \sqrt{b^2 - a.c}\right) \longrightarrow \xi(x,y) \text{ – независим първи интеграл} \\ \dot{y}_2(y) = \frac{1}{a}\left(b - \sqrt{b^2 - ac}\right) \longrightarrow \eta(x,y) \text{ – независим първи интеграл} \end{array} \right.$$

$$\left| \begin{array}{l} \xi = \xi(x,y) \\ \eta = \eta(x,y) \end{array} \right\}$$ коректна смяна на променливите която привежда уравнението в каноничен вид

Задача

Приведете в канонична форма уравнението: $u = u(x,y)$;

$$\partial_x^2 u - 2\,\partial_x\partial_y u - 3\,\partial_y^2 u + \partial_x u + \partial_y u = 0$$

и намерете общото решение

Решение

$$a_{ij} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & -3 \end{bmatrix}; \quad a = 1;\ b = -1;\ c = -3 \Rightarrow b^2 - a.c = 1 + 3 = 4 > 0$$

хиперболичен случай.

$$\dot{y}^2 + 2\dot{y} - 3 = 0 \longrightarrow \dot{y}_{1,2} = -1 \pm \sqrt{1+3} = -1 \pm 2$$

$\dot{y}_1(x) = 1 \Rightarrow y = x + \alpha_1 \Rightarrow \alpha_1 = y - x$ – първи интеграл

$\dot{y}_2(x) = -3 \Rightarrow y = -3x + \alpha_2 \Rightarrow \alpha_2 = y + 3x$ – първи интеграл

$$\Rightarrow \left| \begin{array}{l} \xi = -x + y \\ \eta = 3x + y \end{array} \right\}$$ смяна на променливи

$$\begin{cases} \partial_x u = \partial_\xi u' \cdot (-1) + \partial_\eta u' \cdot 3 \\ \partial_y u = \partial_\xi u' \cdot 1 + \partial_\eta u' \cdot 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \partial_x \partial_x u = \partial_\xi \partial_\xi u' (-1)^2 + \partial_\eta \partial_\xi u' (-3) + \partial_\xi \partial_\eta u' (-3) + \partial_\eta \partial_\eta u' \cdot 3 \\ \partial_x \partial_y u = \partial_\xi \partial_\xi u' (-1) + \partial_\eta \partial_\xi u' \cdot 3 + \partial_\xi \partial_\eta u' (-1) + \partial_\eta \partial_\eta u' \cdot 3 \\ \partial_y \partial_y u = \partial_\xi \partial_\xi u' + \partial_\eta \partial_\xi u' + \partial_\xi \partial_\eta u' + \partial_\eta \partial_\eta u' \end{cases}$$

Заместваме в уравнението

$$(\partial_\xi^2 u' - 6 \partial_\xi \partial_\eta u' + 9 \partial_\eta^2 u') - 2(-\partial_\xi^2 u' + 2\partial_\xi \partial_\eta u' + 3 \partial_\eta^2 u') -$$

$$- 3(\partial_\xi^2 u' + 2\partial_\xi \partial_\eta u' + \partial_\eta^2 u') + (-\partial_\xi u' + 3 \partial_\eta u') + (\partial_\xi u' + \partial_\eta u') = 0$$

$$\partial_\xi^2 u' \cdot (\cancel{1+2-3}) + \partial_\xi \partial_\eta u' \cdot (-6-4-6) + \partial_\eta^2 u' \cdot (\cancel{9-6-3}) + \partial_\xi u' \cdot (1-1) + \partial_\eta u' \cdot 4 = 0$$

$$\Rightarrow -16\, \partial_\xi \partial_\eta u' + 4 \partial_\eta u' = 0 \quad \Rightarrow \quad \partial_\xi \partial_\eta u' - \frac{1}{4} \partial_\eta u' = 0$$

Полагаме $\partial_\eta u'(\xi,\eta) = V(\xi,\eta) \Rightarrow \partial_\xi V(\xi,\eta) - \frac{1}{4} V(\xi,\eta) = 0$

$$\Rightarrow V(\xi,\eta) = h(\eta)\, e^{\frac{1}{4}\xi} \quad \Rightarrow \quad \partial_\eta u'(\xi,\eta) = h(\eta)\, e^{\frac{1}{4}\xi}$$

$$\Rightarrow u'(\xi,\eta) = \int h(\eta)\, d\eta \cdot e^{\frac{1}{4}\xi} + g(\xi) = f(\eta)\, e^{\frac{1}{4}\xi} + g(\xi)$$

$\Rightarrow u'(\xi,\eta) = f(\eta) e^{\frac{1}{4}\xi} + g(\xi)$ $\quad f, g$ – произволни

Връщаме се към изходните променливи

$u(x,y) = f(3x+y)\, e^{\frac{1}{4}(y-x)} + g(y-x)$ – общо решение.

Задача

Приведете в канонична форма уравнението и намерете общото решение:

$$y \cdot \partial_x^2 u + (x+y) \partial_x \partial_y u + x \partial_y^2 u = 0 \; ; \; u = u(x,y) \; ; \; x - y \neq 0$$

Решение

Уравнението е с променливи коефициенти

$$a_{ij} = \begin{bmatrix} y & \frac{1}{2}(x+y) \\ \frac{1}{2}(x+y) & x \end{bmatrix} \qquad a = y\ ;\ b = \frac{1}{2}(x+y)\ ;\ c = x$$

$$b^2 - ac = \frac{1}{4}(x+y)^2 - xy = \frac{1}{4}(x-y)^2 > 0$$

при $x \neq y$. Уравнението е хиперболично извън правите $y = x$ и параболично върху правата $y = x$

$$y \cdot \dot{y}^2 - 2\,\frac{x+y}{2}\cdot \dot{y} + x = 0$$

$$\dot{y}_{1,2} = \frac{1}{y}\left(\frac{x+y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{x+y}{2}\right)^2 - xy}\right) = \frac{1}{y}\left(\frac{x+y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{x-y}{2}\right)^2}\right)$$

$$\dot{y}_{1,2} = \frac{1}{y}\left(\frac{x+y}{2} \pm \frac{x-y}{2}\right) \Rightarrow \dot{y} = \frac{x}{y}\ \&\ \dot{y} = 1$$

$$\dot{y} = \frac{x}{y} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{x}{y} \Rightarrow y\,dy = x\,dx \Rightarrow y^2 = x^2 + \alpha_1$$

$\Rightarrow \alpha_1 = y^2 - x^2$ – първи интеграл

$\dot{y}(x) = 1 \Rightarrow y = x + \alpha_2 \rightarrow \alpha_2 = y - x$ – първи интеграл

$$\begin{cases} \xi = y^2 - x^2 \\ \eta = y - x \end{cases}$$

$$\begin{cases} \partial_x u = \partial_\xi u' \cdot (-2x) + \partial_\eta u' (-1) \\ \partial_y u = \partial_\xi u' \cdot (2y) + \partial_\eta u' \end{cases}$$

$$\begin{cases} \partial_x \partial_x u = \partial_\xi \partial_\xi u'\, 4x^2 + \partial_\eta \partial_\xi u' . 2x - 2\partial_\xi u' + \partial_\xi \partial_\eta u' . 2x + \partial_\eta \partial_\eta u' \\ \partial_x \partial_y u = \partial_\xi \partial_\xi u' (-4xy) + \partial_\eta \partial_\xi u' (-2y) + \partial_\xi \partial_\eta u' (-2x) + \partial_\eta \partial_\eta u' (-1) \\ \partial_y \partial_y u = \partial_\xi \partial_\xi u' . 4y^2 + \partial_\eta \partial_\xi u' . 2y + 2 . \partial_\xi u' + \partial_\xi \partial_\eta u' . 2y + \partial_\eta \partial_\eta u' \end{cases}$$

Заместваме в уравнението.

$$y \cdot (4x^2 . \partial_\xi^2 u' + 4x . \partial_\xi \partial_\eta u' + \partial_\eta^2 u' - 2\partial_\xi u') +$$

$$+ (x+y)(-4xy\,\partial_\xi^2 u' - 2(x+y))\partial_\xi \partial_\eta u' - \partial_\eta^2 u') +$$

$$+ x . (4y^2)\partial_\xi^2 u' + 4y . \partial_\xi \partial_\eta u' + \partial_\eta^2 u' + 2\partial_\xi u') = 0$$

$$\partial_\xi^2 u' . (4\cancel{y . x^2} - 4\cancel{x . y .}(x+y) + 4xy^2) + \partial_\eta^2 u' (y - (x+y) + x) +$$

$$+ \partial_\xi \partial_\eta u' (4xy - 2(x+y)^2 + 4xy) + \partial_\xi u' . (-2y + 2x) = 0$$

$$(4xy-(x+y)^2)\,\partial_\xi\partial_\eta u' + (x-y)\,\partial_\xi u' = 0$$

$$(y-x)^2\,\partial_\xi\partial_\eta u' + (y-x)\,\partial_\xi u' = 0$$

$$(\underbrace{y-x}_{\eta})\,\partial_\xi\partial_\eta u' + \partial_\xi u' = 0 \Rightarrow \eta\,\partial_\xi\partial_\eta u' + \partial_\xi u' = 0$$

Полагаме $\partial_\xi u'(\xi,\eta) = V(\xi,\eta) \Rightarrow \eta\cdot\partial_\eta V(\xi,\eta) + V(\xi,\eta) = 0$

ξ е параметър в това обикновено диф. ур. уравнение

$$\frac{dV}{d\eta} = -\frac{d\eta}{\eta} \Rightarrow \ln V = -\ln\eta + const \Rightarrow V(\xi,\eta) = \frac{1}{\eta}\cdot h(\xi)$$

$$\frac{\partial}{\partial\xi}u'(\xi,\eta) = \frac{1}{\eta}h(\xi) \to u'(\xi,\eta) = \frac{1}{\eta}\int h(\xi)\,d\xi + g(\eta) \Rightarrow$$

$u'(\xi,\eta) = \frac{1}{\eta}f(\xi) + g(\eta)$; f, g - произволни

Връщаме се към изходните променливи

$$u(x,y) = \frac{1}{y-x}\cdot f(y^2-x^2) + g(y-x)$$

Задача

Приведете в канонична форма уравнението

$$4\partial_x^2 u + 4\partial_x\partial_y u + \partial_y^2 u + 2\partial_y u = 0 \quad ; \quad u = u(x,y)$$

Решение

$a_{ij} = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ $a=4,\ b=2,\ c=1$

$b^2 - ac = 4-4 = 0$ - параболично уравнение

$4\dot y^2 - 4\dot y + 1 = 0 \Rightarrow \dot y(x) = \frac{1}{2}$ единствен корен

$y = \frac{1}{2}x + \alpha \to \alpha = y - \frac{1}{2}x$ първи интеграл

Без ограничение $\to$ $x - 2y$ - първи интеграл

$\left|\begin{array}{l} \xi = x - 2y \\ \eta = x \text{ - наш избор} \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{D(\xi,\eta)}{D(x,y)} = \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 2 \neq 0$

$$\begin{cases} \partial_x u = \partial_\xi u' + \partial_\eta u' \\ \partial_y u = \partial_\xi u'(-2) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \partial_x \partial_x u = \partial_\xi \partial_\xi u' + \partial_\eta \partial_\xi u' + \partial_\xi \partial_\eta u' + \partial_\eta \partial_\eta u' \\ \partial_x \partial_y u = \partial_\xi \partial_\xi u'(-2) + \partial_\eta \partial_\xi u'(-2) \\ \partial_y \partial_y u = \partial_\xi \partial_\xi u' . 4 \end{cases}$$

Заместваме в уравнението

$$4 . \left(\partial_\xi^2 u' + 2 \partial_\xi \partial_\eta u' + \partial_\eta^2 u' \right) + 4 \left(-2 \partial_\xi^2 u' - 2 \partial_\xi \partial_\eta u' \right) + 4 \partial_\xi^2 u' - 4 \partial_\xi u' = 0$$

$$\partial_\xi^2 u' (4 - 8 + 4) + \partial_\xi \partial_\eta u' \cancel{(8 - 8)} + 4 \partial_\xi^2 u' - 4 \partial_\xi u' = 0$$

$$\Rightarrow \frac{\partial^2}{\partial \eta^2} u'(\xi, \eta) - \frac{\partial}{\partial \xi} u'(\xi, \eta) = 0$$

Уравнение на топлопроводността

<u>Задача</u>

Приведете в канонична форма уравнението:

$$x^2 \partial_x^2 u - 2xy \, \partial_x \partial_y u + y^2 \partial_y^2 u + x \partial_x u + y \partial_y u = 0 ,$$

$u = u(x,y)$ и намерете общото решение

<u>Решение</u>

$$a_{ij} = \begin{bmatrix} x^2 & -xy \\ -xy & y^2 \end{bmatrix} \quad ; \; a = x^2, \; b = -xy, \; c = y^2$$

$$b^2 - ac = (x.y)^2 - x^2 . y^2 = 0$$

<u>параболично уравнение</u>

$$\dot{y}(x) = \frac{b}{a} = - \frac{x.y}{x^2} = - \frac{y}{x} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = - \frac{y}{x}$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{y} = - \frac{dx}{x} \Rightarrow \ln y = \ln \frac{1}{x} + const \Rightarrow y = \frac{1}{x} . \alpha$$

$\Rightarrow \alpha = x.y$ - първи интеграл. Смяна на променливите:

$$\left| \begin{aligned} \xi &= x.y \\ \eta &= x \; \text{- възможен избор} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \frac{D(\xi, \eta)}{D(x,y)} = \begin{vmatrix} y & x \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -x$$

коректна при $x \neq 0$

$$\partial_x u = \partial_\xi u' \cdot y + \partial_\eta u'$$
$$\partial_y u = \partial_\xi u' \cdot x$$

$$\partial_x\partial_x u = \partial_\xi\partial_\xi u' \cdot y^2 + \partial_\eta\partial_\xi u' \cdot y + \partial_\xi\partial_\eta u' \cdot y + \partial_\eta\partial_\eta u'$$
$$\partial_x\partial_y u = \partial_\xi\partial_\xi u' \cdot x.y + \partial_\eta\partial_\xi u' \cdot x + \partial_\xi u'$$
$$\partial_y\partial_y u = \partial_\xi\partial_\xi u' \cdot x^2$$

Заместваме в уравнението

$$x^2(y^2 \cdot \partial_\xi^2 u' + 2y \cdot \partial_\xi\partial_\eta u' + \partial_\eta^2 u') - 2xy(xy\,\partial_\xi^2 u' + x \cdot \partial_\xi\partial_\eta u' + \partial_\xi u') +$$
$$+ y^2 \cdot x^2 \cdot \partial_\xi^2 u' + x(y \cdot \partial_\xi u' + \partial_\eta u') + y \cdot x\,\partial_\xi u' = 0$$

$$\partial_\xi^2 u' \cdot (\cancel{x^2y^2} - \cancel{2x^2y^2} + \cancel{x^2y^2}) + \partial_\xi\partial_\eta u'(\cancel{2x^2y} - \cancel{2x^2y}) +$$
$$+ x^2 \cdot \partial_\eta^2 u' + \cancel{x.y\,\partial_\xi u'} + x \cdot \partial_\eta u' + \cancel{xy\,\partial_\xi u'} - \cancel{2xy\,\partial_\xi u'} = 0$$

$$x^2 \partial_\eta^2 u' + x\,\partial_\eta u' = 0 \Rightarrow \partial_\eta^2 u' + \frac{1}{x}\partial_\eta u' = 0 \Rightarrow$$
$$\partial_\eta^2 u'(\xi,\eta) + \frac{1}{\eta}\partial_\eta u'(\xi,\eta) = 0$$

ξ участва като параметър. По същество това е обикновено диференциално уравнение за функция на η.

Полагаме $\partial_\eta u'(\xi,\eta) = V(\xi,\eta) \Rightarrow \partial_\eta V(\xi,\eta) = -\frac{1}{\eta} V(\xi,\eta)$

$$\frac{dV}{V} = -\frac{d\eta}{\eta} \Rightarrow \ln V = \ln\frac{1}{\eta} + const$$

$$\Rightarrow V(\xi,\eta) = \frac{1}{\eta} \cdot f(\xi) \Rightarrow \frac{\partial}{\partial\eta} u'(\xi,\eta) = \frac{1}{\eta} \cdot f(\xi)$$

$$u'(\xi,\eta) = \ln|\eta| \cdot f(\xi) + g(\xi)$$

$u(x,y) = \ln|x| \cdot f(x.y) + g(x.y)$; f, g произволни гладки функции на една променлива

Елиптично уравнение

Задача

Приведете в канонична форма уравнението:

$$\partial_x^2 u - 6\,\partial_x\partial_y u + 10\,\partial_y^2 u + \partial_x u - 3\,\partial_y u$$

Решение

$$a_{ij} = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ -3 & 10 \end{bmatrix}; \qquad a = 1,\ b = -3,\ c = 10$$

$$b^2 - ac = 9 - 10 = -1 < 0$$

Елиптично уравнение

$$y'^2 + 6y' + 10 = 0 \;\to\; y' = -3 \pm \sqrt{9-10}$$

Избираме $y' = -3 - i \Rightarrow y = -(3+i)x + \alpha$

$\alpha = y + (3+i)x$ – първи интеграл

$$\omega(x,y) = y + 3x + i\cdot x = \omega_1(x,y) + i\cdot\omega_2(x,y)$$

$$\begin{cases} \xi = 3x + y \\ \eta = x \end{cases}$$

$$\begin{cases} \partial_x u = \partial_\xi u' \cdot 3 + \partial_\eta u' \\ \partial_y u = \partial_\xi u' \end{cases}$$

$$\begin{cases} \partial_x\partial_x u = \partial_\xi\partial_\xi u' \cdot 9 + \partial_\eta\partial_\xi u' \cdot 3 + \partial_\xi\partial_\eta u' \cdot 3 + \partial_\eta\partial_\eta u' \\ \partial_x\partial_y u = \partial_\xi\partial_\xi u' \cdot 3 + \partial_\eta\partial_\xi u' \\ \partial_y\partial_y u = \partial_\xi\partial_\xi u' \end{cases}$$

Заместваме в уравнението

$$(9\cdot\partial_\xi^2 u' + 6\,\partial_\xi\partial_\eta u' + \partial_\eta^2 u') - 6(3\cdot\partial_\xi^2 u' + \partial_\xi\partial_\eta u') + 10\,\partial_\xi^2 u' +$$

$$+ \cancel{3\partial_\xi u'} + \partial_\eta u' - \cancel{3\partial_\xi u'} = 0$$

$$\partial_\xi^2 u'(9 - 18 + 10) + \partial_\xi\partial_\eta(\cancel{6-6}) + \partial_\eta^2 u' + \partial_\eta u' = 0$$

$$\partial_\xi^2 u' + \partial_\eta^2 u' + \partial_\eta u' = 0$$

канонична форма на елиптичното уравнение.

Задача

Приведете в канонична форма уравнението

$$(1+x^2)\partial_x^2 u + (1+y^2)\partial_y^2 u + x.\partial_x u + y\,\partial_y u = 0$$

Решение

$$a_{ij} = \begin{bmatrix} 1+x^2 & 0 \\ 0 & 1+y^2 \end{bmatrix} \qquad a = (1+x^2),\ b = 0,\ c = (1+y^2)$$

$$b^2 - a.c = -(1+x^2)(1+y^2) < 0$$

Елиптично уравнение

$$(1+x^2).\dot{y}^2 + (1+y^2) = 0 \rightarrow \text{избираме: } \dot{y}(x) = -i\sqrt{\frac{1+y^2}{1+x^2}}$$

$$\frac{dy}{\sqrt{1+y^2}} = -i\frac{dx}{\sqrt{1+x^2}} \Rightarrow \ln(y+\sqrt{1+y^2}) = -i\ln(x+\sqrt{1+x^2}) + \alpha$$

$$\alpha = \omega(x,y) = \ln(y+\sqrt{1+y^2}) + i\ln(x+\sqrt{1+x^2}) = \omega_1(x,y) + i\omega_2(x,y)$$

първи интеграл. Сменя на променливи $\rightarrow$

$$\left|\begin{array}{ll} \xi = \ln(y+\sqrt{1+y^2}) & \rightarrow \partial_y \xi = \frac{1}{\sqrt{1+y^2}} \\ \eta = \ln(x+\sqrt{1+x^2}) & \rightarrow \partial_x \eta = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} \end{array}\right.$$

$$\left|\begin{array}{l} \partial_x u = \partial_\eta u' \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} \\ \partial_y u = \partial_\xi u' \frac{1}{\sqrt{1+y^2}} \end{array}\right.$$

$$\left|\begin{array}{l} \partial_x\partial_x u = \partial_\eta\partial_\eta u' \frac{1}{1+x^2} - \partial_\eta u' . \frac{1}{2}\frac{2x}{(1+x^2)^{3/2}} \\ \partial_y\partial_y u = \partial_\xi\partial_\xi u' \frac{1}{1+y^2} - \partial_\xi u' . \frac{1}{2}\frac{2y}{(1+y^2)^{3/2}} \end{array}\right.$$

Замествам в уравнението

$$(1+x^2)\left(\frac{1}{1+x^2}\partial_\eta^2 u' - \frac{x}{(1+x^2)^{3/2}}\partial_\eta u'\right) + (1+y^2)\left(\frac{1}{1+y^2}\partial_\xi^2 u' - \frac{y}{(1+y^2)^{3/2}}\partial_\xi u'\right) +$$

$$+ x\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\partial_\eta u' + y\frac{1}{\sqrt{1+y^2}}\partial_\xi u' = 0 \quad \Rightarrow$$

$$\partial_\xi^2 u' + \partial_\eta^2 u' = 0$$

Петко Николов

Упражнения по Ч.Д.У. Ф3.Ф.

Обобщени функции

$\mathcal{D} \subset C^{\infty}(\mathbb{R}^n, \mathbb{C})$ – гладки функции с компактен носител
"пробни функции"

$u \in \mathcal{D}'$: $u : \mathcal{D} \to \mathbb{C}$ линеен непрекъснат функционал
"обобщена функция"

$$u, \varphi \to u(\varphi) \equiv \langle u, \varphi \rangle \in \mathbb{C} \quad ; u \in \mathcal{D}';\ \varphi \in \mathcal{D}$$

$f \in C^{\infty}(\mathbb{R}^n, \mathbb{C}) \to f \in \mathcal{D}'$ в смисъл, че

$$\langle f, \varphi \rangle = \int_{\mathbb{R}^n} f(x)\varphi(x)\, d^n x$$, "регулярна обобщена функция"

Има обоб. функции непредставими по този начин

Най-прости примери

$$\langle \delta(x), \varphi(x) \rangle \equiv \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x)\varphi(x)\, dx := \varphi(0)$$

$$\langle \delta(x-a), \varphi(x) \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x-a)\varphi(x)\, dx := \varphi(a)$$

Нека $f(x)$ е гладка функция с краен брой прости корени

$f(x) = 0 \to x_1, \dots, x_N$ корени & $f'(x_k) \neq 0$, $k = 1, 2, \dots, N$

Тогава:

$$\langle \delta(f(x)), \varphi(x) \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(f(x))\varphi(x)\, dx = \sum_{k=1}^{N} \varphi(x_k) \cdot \frac{1}{|f'(x_k)|}$$

Дефиниция:

$g \in C^{\infty}(\mathbb{R}^n, \mathbb{C}) \to \langle g.u, \varphi \rangle = \langle u, g.\varphi \rangle$; g-мултипликатор.

коректност: $g.u$ е също линеен и непрекъснат функционал

$$\langle \partial_{\mu_1} \dots \partial_{\mu_r} u, \varphi \rangle = (-1)^r \langle u, \partial_{\mu_1} \dots \partial_{\mu_r} \varphi \rangle$$

коректност: $\partial_{\mu_1} \dots \partial_{\mu_r} u$ е също линеен непрек. функционал.

Примери и задачи · $g(x)\delta(x) = g(0).\delta(x)$

$$\langle \delta(2x), \varphi(x) \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(2x)\varphi(x)\, dx = \varphi(0) \cdot \frac{1}{2} \Rightarrow \delta(2x) = \frac{1}{2}\delta(x)$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x^2 - 4x + 3)\varphi(x)\, dx = ?$$

$$f = x^2 - 4x + 3 = 0 \rightarrow x_{1,2} = 2 \pm \sqrt{4-3} = 2 \pm 1 \Rightarrow x_1 = 1,\ x_2 = 3$$

$$f' = 2x - 4 \rightarrow f'(x_1) = 2 - 4 = -2 \ ;\ f'(x_2) = 6 - 4 = +2$$

$$\Rightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x^2 - 4x + 3)\varphi(x)\,dx = \frac{1}{2}\varphi(1) + \frac{1}{2}\varphi(3)$$

→ Задача:
Проверете правилото на Лайбниц: $g(x)$ - мултипликатор
$u(x)$ - обобщена функция на една промен.

$$(g.u)' = g'.u + g.u'$$

Проверка

$$\langle (g.u)', \varphi \rangle = -\langle g.u, \varphi' \rangle = -\langle u, g.\varphi' \rangle$$

$$\langle g'.u + g.u', \varphi \rangle = \langle g'u, \varphi \rangle + \langle g.u', \varphi \rangle =$$

$$= \langle u, g'.\varphi \rangle + \langle u', g.\varphi \rangle = \langle u, g'.\varphi \rangle - \langle u, (g.\varphi)' \rangle =$$

$$\langle u, g'.\varphi - g'.\varphi - g.\varphi' \rangle = -\langle u, g.\varphi' \rangle \quad ; \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}$$

Съвпадат като обобщени функции

$$\langle u(\omega(x)), \varphi(x) \rangle = \langle u(\omega), \varphi(x(\omega)) \left|\frac{D(x)}{D(\omega)}\right|(\omega) \rangle$$

Задача
Линейна смяна на променливите
$f(x)$ - регулярна об. ф. $\rightarrow f(ax+b),\ a \neq 0$ рег. об. ф

$$\langle f(ax+b), \varphi \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} f(ax+b)\varphi(x)\,dx =$$

при смяна $ax + b = \xi \rightarrow x = \frac{1}{a}(\xi - b)$

$$= \frac{1}{|a|}\int_{-\infty}^{+\infty} f(\xi)\,\varphi\left(\frac{1}{a}(\xi - b)\right) d\xi$$

Това се приема и за произволна обобщена функция

$$\langle u(ax+b), \varphi(x) \rangle = \langle u, \frac{1}{|a|}\varphi\left(\frac{1}{a}(x-b)\right) \rangle$$

В случая на n променливи $\vec{x} \rightarrow A\vec{x} + \vec{b}$, $\det(A) \neq 0$

$$\langle u(A\vec{x} + \vec{b}), \varphi(\vec{x}) \rangle = \langle u(\vec{x}), \frac{1}{|\det(A)|}\varphi\left(A^{-1}(\vec{x} - \vec{b})\right) \rangle$$

$$\langle \delta'(3x), \varphi(x)\rangle = \langle \delta'(x), \tfrac{1}{3}\varphi(\tfrac{1}{3}x)\rangle = -\langle \delta(x), \tfrac{1}{3}(\varphi(\tfrac{1}{3}x)')\rangle =$$

$$= -\frac{1}{9}\varphi'(0)\ ; \quad \delta'(3x) = \frac{1}{9}\delta'(x) \quad ; \quad \delta'(-3x) = -\frac{1}{9}\delta'(x)$$

Ако $\vec{x} \in R^3 \rightarrow \langle u(\lambda\vec{x}), \varphi(\vec{x})\rangle = \frac{1}{\lambda^3}\langle u(\vec{x}), \varphi(\frac{1}{\lambda}\vec{x})\rangle$

Пример

$\theta(x) = \begin{cases} 1, & x>0 \\ 0, & x<0 \end{cases}$ локално интегруема $\rightarrow \theta(x)$ е об. ф ($\theta(0)=?$ няма значение)

$$\langle \theta(x), \varphi(x)\rangle = \int_{-\infty}^{+\infty}\theta(x)\varphi(x)\,dx = \int_0^{\infty}\varphi(x)\,dx$$

Задачи : Покажете, че

1. $\theta'(x) = \delta(x)$

$$\langle \theta'(x), \varphi(x)\rangle = -\langle \theta(x), \varphi'(x)\rangle = -\int_0^{\infty}\varphi'(x)\,dx = -\varphi(x)\Big|_0^{\infty} =$$

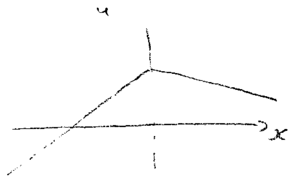
$$= \varphi(0) = \langle \delta(x), \varphi(x)\rangle \ ; \ \forall \varphi \in \mathcal{D}$$

2. $u = -x\,\theta(x)$ е решение на уравнението : $u''(x) = -\delta(x)$

$$\frac{d}{dx}\frac{d}{dx}(-x\,\theta(x)) = -\frac{d}{dx}\big(\theta(x) + \underbrace{x.\delta(x)}_{0}\big) = -\frac{d}{dx}\theta(x) = -\delta(x)$$

Общото решение на уравнението е

$u(x) = ax + b - x\,\theta(x)$; a, b - произволни ;



→ Задача

Намерете общото решение на уравнението

$x^n . u(x) = 0$ в класа на обобщените функции

Решение

при $x \neq 0 \Rightarrow x^n \neq 0 \Rightarrow supp(u) = \{0\}$

$\Rightarrow u(x) = \sum_{k=0}^{N} a_k . \delta^{(k)}(x)$; "крайна линейна комбинация от $\delta(x)$ и нейните производни"

Колко трябва да бъде N и какви трябва да бъдат коефициентите a_k за да бъде $u(x)$ решение? Трябва:

$$\langle x^n u(x), \varphi(x)\rangle = \langle u, x^n\varphi(x)\rangle = \langle \sum_{k=0}^{N} a_k \delta^{(k)}(x), x^n\varphi(x)\rangle =$$

$$= \sum_{k=0}^{N} a_k (-1)^k \frac{d^k}{dx^k}(x^n\varphi(x))\Big|_{x=0} = 0, \quad \forall\varphi\in\mathcal{D}$$

$\Rightarrow a_k = 0$, при $k = n, n+1, \dots$

Общото решение е $u = \sum_{k=0}^{n-1} a_k\delta^{(k)}(x)$, където

$a_0, a_1, \dots, a_{n-1}$ са произволни.

Коментар

В класа на обобщените функции имаме n-параметрична фамилия от решения. В класа на гладките функции ($C^\infty(\mathbb{R})$) имаме само едно решение $u(x)=0$.

В класа на всички функции имаме еднопараметрична фамилия от решение: $u(x) = \begin{cases}0, & x\ne 0\\ a, & x=0,\end{cases}$ a - произволно

Задача

Намерете общото решение на уравнението $(x_1^2+x_2^2+x_3^2)\cdot u = 0$, $u\in\mathcal{D}'^{(3)}$ - обобщени функции на три променливи.

Отново $\mathrm{supp}(u) = \{\vec{0}\}$. Всяко решение има вида крайна линейна комбинация на δ-функция и нейните частни производни ($\vec{x} = (x_1, x_2, x_3)$)

$$u = \sum_{k=0}^{N} \sum_{1\le\mu_1\le\dots\le\mu_k\le 3} a_{\mu_1\dots\mu_k}\partial_{\mu_1}\dots\partial_{\mu_k}\delta(\vec{x})$$

Отговорът е по-сложен. Има безкрайно параметрична фамилия от решение. При фиксиран ред на производните l има $(2l+1)$ линейно независими решение. Проверяваме за неголемите стойности.

$l=0 \to a.\delta(\vec{x})$ очевидно е решение за всяко a

$(2.0+1)=1$ еднопараметрична фамилия

$l=1 \to \sum_{\mu=1}^{3} a_\mu \partial_\mu \delta(\vec{x})$ е решение за всяко a_1, a_2, a_3

$(2.1+1)=3$ тримерно векторно пространство

$l=2 \to u = \sum_{1\le\mu_1\le\mu_2\le 3} a_{\mu_1\mu_2} \partial_{\mu_1}\partial_{\mu_2} \delta(\vec{x})$; $\vec{x}^{\,2} u(\vec{x}) = 0 \Rightarrow$

$$\left\langle \sum_{\mu_1\le\mu_2} a_{\mu_1\mu_2} \partial_{\mu_1}\partial_{\mu_2} \delta(\vec{x}), \vec{x}^{\,2}\varphi(\vec{x}) \right\rangle = 0 \Rightarrow$$

$$\sum_{\mu_1\le\mu_2} a_{\mu_1\mu_2} \left\langle \delta(\vec{x}), \partial_{\mu_1}\partial_{\mu_2}(x_1^2+x_2^2+x_3^2).\varphi(\vec{x}) \right\rangle =$$

$$= \sum_{\mu=1}^{3} 2a_{\mu\mu}.\varphi(\vec{0}) = 0 \text{ , за всяко } \varphi \in \mathcal{D}^{(3)}$$

Трябва $\sum_{\mu=1}^{3} a_{\mu\mu} = 0$ остават 5 свободни параметъра

→ Задача

Функцията $\ln|x|$ е локално интегруема и определя обобщена функция. Изчислете $\frac{d}{dx}(\ln|x|)$. (която също е определена)

Решение

Нека $\varphi \in \mathcal{D}$ - пробна функция. По дефиниция

$$\langle \ln'|x|, \varphi(x)\rangle = -\langle \ln|x|, \varphi'(x)\rangle = -\int_{-\infty}^{+\infty} \ln|x|.\varphi'(x)\,dx =$$

Избираме R такова, че $supp(u) \subset (-R,R)$. (за различни $\varphi \in \mathcal{D}'$, това R е различно). В този интервал φ има представяне $\varphi(x) = \varphi(0) + x.\varphi_1(x)$

$$= -\int_{-R}^{R} \ln|x|.(x.\varphi_1(x))'\,dx =$$

ln|x| има особеност в $x=0$ но е локално интегруема. Интегралът съществува като несобствен. Изрязваме особеността в интервала $(-\varepsilon_1, \varepsilon_2)$

$$= -\lim_{\varepsilon_1 \to 0} \int_{-R}^{-\varepsilon_1} \ln|x| (x \cdot \varphi_1(x))' dx - \lim_{\varepsilon_2 \to 0} \int_{\varepsilon_2}^{R} \ln|x| (x . \varphi_1(x))' dx =$$

сега в интервалите можем да интегрираме по части

$$= -\lim_{\varepsilon_1 \to 0} \left(\ln|x| . x . \varphi_1(x) \Big|_{-R}^{-\varepsilon_1} - \int_{-R}^{-\varepsilon_1} x . \varphi_1(x) . \frac{1}{x} dx \right)$$

$$- \lim_{\varepsilon_2 \to 0} \left(\ln|x| . x . \varphi_1(x) \Big|_{\varepsilon_2}^{R} - \int_{\varepsilon_2}^{R} x . \varphi_1(x) . \frac{1}{x} dx \right) =$$

$$= \int_{-R}^{+R} \varphi_1(x) dx + \lim_{\varepsilon_1 \to 0} \underbrace{\left(\ln(\varepsilon_1) . \varepsilon_1 . \varphi_1(\varepsilon_1) \right)}_{=0} - \ln(R) . R . \varphi_1(-R) -$$

$$- \ln(R) . R . \varphi_1(R) + \lim_{\varepsilon_2 \to 0} \underbrace{\left(\ln(\varepsilon_2) . \varepsilon_2 . \varphi_1(\varepsilon_2) \right)}_{=0} =$$

Но от $\varphi(x) = \varphi(0) + x . \varphi_1(x)$ & $\varphi(-R) = \varphi(R) = 0 \Rightarrow$

$\varphi(-R) = 0 \Rightarrow \varphi(0) - R . \varphi_1(-R) = 0 \Rightarrow R . \varphi_1(-R) = \varphi(0)$

$\varphi(R) = 0 \Rightarrow \varphi(0) + R . \varphi_1(R) = 0 \Rightarrow R . \varphi_1(R) = -\varphi(0)$

$\Rightarrow R . \varphi_1(-R) + R . \varphi_1(R) = 0$

$$= \int_{-R}^{R} \varphi_1(x) dx = \left\langle P\left(\frac{1}{x}\right), \varphi(x) \right\rangle \Rightarrow \ln'|x| = P\left(\frac{1}{x}\right)$$

Задача

Покажете, че $u(\vec{x}) = -\frac{1}{2\pi} \ln|\vec{x}|$, $\vec{x} = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ е решение на уравнението $\Delta_2 u(x_1, x_2) = -\delta(x_1, x_2)$

Коментар

Това е изследването на безкрайна идеална еластична цепа при точково натоварване в $\vec{x} = \vec{0}$. Друга интерпретация - електростатичен потенциал по бурфейла равномерно непрекъснато правъе на оста "x_3"

Решение

При $\vec{x} \neq \vec{0}$, $\ln|\vec{x}|$ е диференцируема функция и е решение на $\Delta_2 u = 0$. Приемаме в полярни координати

$$\left| \begin{array}{l} x_1 = \rho\cos\varphi \\ x_2 = \rho\sin\varphi \end{array} \right\} \quad \Delta = \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\frac{\partial}{\partial\rho}\right) + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}$$

$$\Rightarrow \Delta \ln(\rho) = \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\frac{\partial}{\partial\rho}\ln\rho\right) = \frac{1}{\rho}\frac{d}{d\rho}\left(\rho\cdot\frac{1}{\rho}\right) = 0$$

Функцията $\ln|\vec{x}|$ е локално интегруема и определя обобщена функция която е диференцируема навсякъде. Трябва да проверим, че

$$\left\langle \Delta\left(\frac{-1}{2\pi}\ln|\vec{x}|\right), \varphi(\vec{x}) \right\rangle = \langle -\delta(\vec{x}), \varphi(\vec{x}) \rangle = -\varphi(\vec{0})$$

Изчисляваме:

$$\left\langle \Delta\left(\frac{-1}{2\pi}\ln|\vec{x}|\right), \varphi \right\rangle = -\frac{1}{2\pi}\langle \ln|\vec{x}|, \Delta\varphi(x) \rangle =$$

$$= -\frac{1}{2\pi}\iint_{\mathbb{R}^2} \ln|\vec{x}| \cdot \Delta\varphi(x) \cdot d^2x =$$

φ е с компактен носител. Избираме $R > 0$ такова, че $\operatorname{supp}(\varphi) \subset B_R = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^2 \mid \vec{x}^2 < R^2\}$. Интегралът съществува като несобствен

$$= \lim_{\varepsilon\to 0}\left(\frac{-1}{2\pi}\right)\iint_{\varepsilon \le |\vec{x}| \le R} \ln(|\vec{x}|) \cdot \Delta\varphi(\vec{x})\, d^2x =$$

$$= -\frac{1}{2\pi}\lim_{\varepsilon\to 0}\iint_{\varepsilon\le\rho\le R}\left(\ln(\rho)\cdot \operatorname{div}\operatorname{grad}\varphi - \varphi\cdot\underbrace{\operatorname{div}\operatorname{grad}(\ln\rho)}_{=0}\right) d^2x =$$

$$= -\frac{1}{2\pi}\lim_{\varepsilon\to 0}\iint_{\varepsilon\le\rho\le R}\operatorname{div}\left(\ln\rho\cdot\operatorname{grad}\varphi - \varphi\cdot\operatorname{grad}(\ln(\rho))\right) d^2x =$$

$$= -\frac{1}{2\pi}\lim_{\varepsilon\to 0}\Big[\oint_{\rho=\varepsilon}\Big(\ln(\varepsilon)\cdot\frac{\partial\varphi}{\partial\vec{n}} - \varphi\frac{\partial}{\partial\vec{n}}\ln(\rho)\Big)dl \; \underbrace{- \frac{1}{2\pi}\oint_{\rho=R}\Big(\ln(R)\frac{\partial\varphi}{\partial\vec{n}} - \varphi\frac{\partial}{\partial\vec{n}}\ln(\rho)\Big)dl}_{=0} =$$

$$= \underbrace{-\frac{1}{2\pi}\lim_{\varepsilon\to 0}\oint_{\rho=\varepsilon}\ln(\varepsilon)\Big(-\frac{\partial\varphi}{\partial\rho}\Big)\cdot dl}_{=0\ (dl=\varepsilon\, d\alpha)} - \frac{1}{2\pi}\lim_{\varepsilon\to 0}\oint_{\rho=\varepsilon}\varphi\cdot\frac{\partial}{\partial\rho}\ln(\rho)\, dl =$$

$$= -\frac{1}{2\pi}\lim_{\varepsilon\to 0}\int_0^{2\pi}\varphi(\varepsilon,\alpha)\,\frac{1}{\varepsilon}\cdot\varepsilon\, d\alpha = -\varphi(\vec{0}) = -\langle\delta(x),\varphi(x)\rangle$$

Интерпретация: Идеалната еластична нишка на ударените тежките материални точки.

Задачи

Покажете, че $u(x,t) = \frac{c}{2}\theta(t-\frac{|x|}{c})$ е решение на уравнението: $\partial_x^2 u - \frac{1}{c^2}\partial_t^2 u = -\delta(x,t)$

Решение

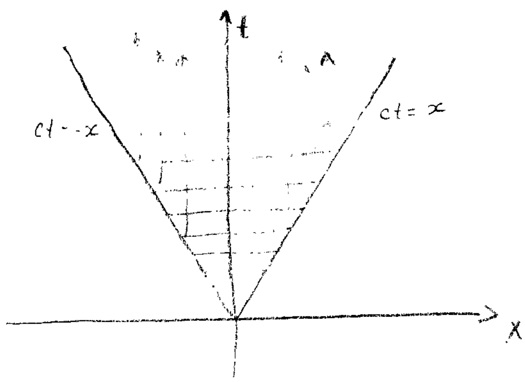
За разлика от предишните случаи, тук sing supp(u) не е точка а е "светлинния конус" $|x| = ct$

Трябва да изчислим

$$\Big\langle \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \varphi\Big\rangle = \Big\langle u, \frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2}\Big\rangle =$$

$$= \Big\langle \frac{c}{2}\theta(t-\frac{|x|}{c}), \partial_x^2\varphi - \frac{1}{c^2}\partial_t^2\varphi\Big\rangle =$$

$$= \frac{c}{2}\iint\theta(t-\frac{|x|}{c})\cdot(\partial_x^2\varphi - \frac{1}{c^2}\partial_t^2\varphi)\,dx\,dt =$$



θ е локално интегрируема функция. $\varphi\in D^{(2)}$ е с компактен носител. Интегралът съществува. Той се представя като повторен интеграл.

$$= -\frac{1}{2c}\int_{-\infty}^{+\infty}\left(\int_{\frac{|x|}{c}}^{\infty}\partial_t^2\varphi(x,t)\,dt\right)dx + \frac{c}{2}\int_0^{\infty}\left(\int_{-ct}^{ct}\partial_x^2\varphi(x,t)\,dx\right)dt =$$

$$= \frac{1}{2c}\int_{-\infty}^{+\infty}\partial_t\varphi\left(x,\frac{|x|}{c}\right)dx + \frac{c}{2}\int_0^{\infty}\left(\partial_x\varphi(ct,t) - \partial_x\varphi(-ct,t)\right)dt =$$

на две по смени

$$= \frac{1}{2c}\int_{-\infty}^{0}\partial_t\varphi\left(x,\frac{-x}{c}\right)dx^{(x=-c\tau)} + \frac{1}{2c}\int_0^{\infty}\partial_t\varphi\left(x,\frac{x}{c}\right)dx^{(x=c\tau)} +$$

$$+ \frac{c}{2}\int_0^{\infty}\partial_x\varphi(ct,t)\,dt^{(t=\tau)} - \frac{c}{2}\int_0^{\infty}\partial_x\varphi(-ct,t)\,dt^{(t=\tau)} =$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{\infty}\partial_t\varphi(-c\tau,\tau)\,d\tau + \frac{1}{2}\int_0^{\infty}\partial_t\varphi(c\tau,\tau)\,d\tau +$$

$$+ \frac{c}{2}\int_0^{\infty}\partial_x\varphi(c\tau,\tau)\,d\tau - \frac{c}{2}\int_0^{\infty}\partial_t\varphi(-c\tau,\tau)\,d\tau =$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{\infty}\left(\partial_t\varphi(c\tau,\tau) + c\,\partial_x\varphi(c\tau,\tau)\right)d\tau + \frac{1}{2}\int_0^{\infty}\left(\partial_t\varphi(-c\tau,\tau) - c\,\partial_x\varphi(-c\tau,\tau)\right)d\tau =$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{\infty}\frac{d}{d\tau}\left(\varphi(c\tau,\tau)\right)d\tau + \frac{1}{2}\int_0^{\infty}\frac{d}{d\tau}\left(\varphi(-c\tau,\tau)\right)d\tau =$$

$$= -\frac{1}{2}\varphi(0,0) - \frac{1}{2}\varphi(0,0) = -\varphi(0,0) = \langle -\delta(\vec{x}), \varphi(\vec{x})\rangle$$

(Горните граници со 0 поради компактниот носител на φ)

Задача (коефициентите могат да се променливи)

Нека: $D[u] = u^{(n)} + a_1 u^{(n-1)} + \dots + a_{n-1}u = 0$ е линеарна хомогена ОДЕ за $u = u(x)$. Нека $u(x)$ е решение определено от почетните услови: $u(0) = u^{(1)}(0) = \dots = u^{(n-2)}(0) = 0$, и $u^{(n-1)} = 1$. Тогава: $g(x) = \theta(x)\cdot u(x)$ е реш на $D[g] = \delta(x)$

Решение

Изчисляваме последователно:

$$g^{(1)}(x) = \frac{d}{dx}\left(\theta(x)\,u(x)\right) = \underbrace{\delta(x).u(x)}_{0,\ (u(0)=0)} + \theta(x)\,u^{(1)}(x) = \theta(x)\,u^{(1)}(x)$$

$$g^{(2)}(x) = \frac{d}{dx}\left(\theta(x).u^{(1)}(x)\right) = \underbrace{\delta(x)\,u^{(1)}(x)}_{0} + \theta(x)\,u^{(2)}(x) = \theta(x)\,u^{(2)}(x)$$

$\vdots$

$$g^{(n-1)}(x) = \frac{d}{dx}\left(\theta(x)\,u^{(n-2)}(x)\right) = \delta(x).u^{(n-2)}(x) + \theta(x)\,u^{(n-1)}(x) = \theta(x)\,u^{(n-1)}(x)$$

$$g^{(n)}(x) = \frac{d}{dx}\left(\theta(x)\,u^{(n-1)}(x)\right) = \delta(x)\,u^{(n-1)}(x) + \theta(x)\,u^{(n)}(x) =$$

$$= \delta(x) + \theta(x)\,u^{(n)}(x)$$

Тогава: $D[g] = g^{(n)} + a_1 g^{(n-1)} + \dots + a_{n-1}.g =$

$$= \delta(x) + \theta(x)\,(\underbrace{u^{(n)} + a_1 u^{(n-1)} + \dots + a_{n-1}u}_{=0;\ u\ e\ \text{решение}}) = \delta(x)$$

Задача (коефициентите могат да са променливи)

Нека е зададено нехомогенно линейно ОДУ:
$u^{(n)}(x) + a_1.u^{(n-1)}(x) + \dots + a_{n-1}\,u(x) = f(x)$. Покажете, че функцията $V(x) = \int_0^x u(x-\tau)f(\tau)\,d\tau$ е решение на нехомогенното уравнение. u е от предната задача

Решение

Изчисляваме последователно

$$V^{(1)}(x) = \underbrace{u(x-x).f(x)}_{=0\ \ (u(0)=0)} + \int_0^x u^{(1)}(x-\tau)f(\tau)\,d\tau$$

$$V^{(2)}(x) = \frac{d}{dx}\left(\int_0^x u^{(1)}(x-\tau)f(\tau)\,d\tau\right) = 0 + \int_0^x u^{(2)}(x-\tau)f(\tau)\,d\tau$$

$\vdots$

$$V^{(n-1)}(x) = \frac{d}{dx}\left(\int_0^x u^{(n-2)}(x-\tau)f(\tau)\,d\tau\right) = 0 + \int_0^x u^{(n-1)}(x-\tau)f(\tau)\,d\tau$$

$$V^{(n)}(x) = \frac{d}{dx}\left(\int_0^x u^{(n-1)}(x-\tau)f(\tau)\,d\tau\right) = \underbrace{u^{(n-1)}(x-x)}_{=1}.f(x) + \int_0^x u^{(n)}(x-\tau)f(\tau)\,d\tau$$

$$= f(x) + \int_0^\infty u^{(n)}(x-\tau)f(\tau)\,d\tau$$

$$\Rightarrow V^{(n)} + a_1 V^{(n-1)} + \dots + a_{n-1} V^n =$$

$$= f(x) + \int_0^x \underbrace{\left(u^{(n)}(x-\tau) + a_1 u^{(n-1)}(x-\tau) + \dots + a_{n-1} u(x-\tau)\right)}_{=0 \ (u \text{ е решение})} f(\tau)\,d\tau =$$

$$= f(x)$$

Задачи

Намерете фурие-образа на $\theta(x)$

Решение

формално $\mathcal{F}[\theta](p) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ipx}\,\theta(x)\,dx = \int_0^{\infty} e^{ipx} \cdot 1 \cdot dx$

Интегралът няма смисъл. Но $\theta(x)$ е обобщена функция от "min S" - бавнорастяща. Като обобщена функция, "min S", $\theta(x)$ има еднозначно и коректно определен фурие-образ, който също е обобщена функция.

Метод на регуляризацията: Ще представим $\theta(x)$ като граница: $\theta(x) = \lim\limits_{\substack{a\to 0\\ a>0}} \theta(x)e^{-ax}$. Това

е коректно определена граница на обобщени функции (Покажете, че за всяко $\varphi \in S$ е изпълнено:

$\lim\limits_{a\to 0} \int_0^\infty e^{-ax} \cdot \varphi(x)\,dx = \int_0^\infty \varphi(x)\,dx$)

$$\mathcal{F}[\theta] = \mathcal{F}\left(\lim_{a\to 0} \theta(x)e^{-ax}\right) = \lim_{a\to 0}\left(\mathcal{F}[\theta(x)e^{-ax}]\right)$$

$$\mathcal{F}[\theta(x)e^{-ax}] = \int_0^\infty e^{ipx} \cdot e^{-ax}\,dx = \int_0^\infty e^{(ip-a)x}\,dx \cdot \frac{ip-a}{ip-a} =$$

$$= \frac{1}{ip-a} e^{(ip-a)x}\Big|_0^\infty = -\frac{1}{ip-a} = \frac{1}{a-ip} = \frac{i}{p+ia} \xrightarrow[\substack{a\to 0\\ a>0}]{} \frac{i}{p+i0}$$

$$\Rightarrow \mathcal{F}[\theta](p) = \frac{i}{p+i0} \qquad \left(= \int_0^\infty e^{ipx}\,dx\right)$$

Коментар: $\operatorname{sing\,supp}\left(\frac{i}{p+i0}\right) = \{0\}$. Извън нулата $\frac{i}{p+i0} = \frac{i}{p}$ е регулярна функция и приемо стойността.

При $p=1$ "формално" получаваме

$$\mathcal{F}[\theta](1) = i = \int_0^\infty e^{ix}\,dx = \int_0^\infty (\cos x + i\sin x)\,dx$$

$$\Rightarrow \int_0^\infty \cos x\,.dx = 0 \quad \& \quad \int_0^\infty \sin x\,.dx = 1 \qquad (!?)$$

Коментар: Има теорема според която всяка обобщена функция може да се представи като граница на регулярни функции. (Това се нарича "секвенциален подход"). По принцип този метод е приложим винаги. Фурие образът е дефиниран коректно и еднозначно в термини на обобщени функции и не зависи от използването регуляризацията.

Неопределен интеграл от обобщена функция на една променлива.

Нека $g \in \mathcal{D}'$ е обобщена функция. Една обобщена функция $f \in \mathcal{D}'$ е "първообразна" на g или е "неопределен интеграл от g" ако $f' = g$ като обобщени функции

т.е. $\quad \langle f', \psi\rangle = \langle g, \psi\rangle, \ \forall \psi \in \mathcal{D}' \quad \Rightarrow$

$$-\langle f, \psi'\rangle = \langle g, \psi\rangle \quad \Rightarrow \quad \langle f, \psi'\rangle = -\langle g, \psi\rangle, \ \forall \psi \in \mathcal{D}$$

Като имаме непрекъснат функционал f е определена еднозначно за тези $\varphi \in \mathcal{D}'$ които са производни на функции от $\mathcal{D}$ (Очевидно ако $\psi \in \mathcal{D} \Rightarrow \psi' \in \mathcal{D}$). Т.е. ако за $\varphi \in \mathcal{D}$ съществува $\psi \in \mathcal{D}$, такова че $\varphi = \psi' \Rightarrow$

$$\langle f, \varphi\rangle = \langle f, \psi'\rangle = -\langle g, \psi\rangle \qquad \left(f = \int g(x)\,dx\right)$$

$$\left(\left\langle \int g(x)\,dx, \varphi\right\rangle = -\left\langle g, \int \varphi(x)\,dx\right\rangle\right)$$

1. Кои функции от $\mathcal{D}$ са производни на функции от $\mathcal{D}$?
Очевидно те образуват векторно подпространство на $\mathcal{D}$
Ако $\varphi \in \mathcal{D}$ & $\varphi = \psi'$ & $\psi \in \mathcal{D} \Rightarrow \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x)\,dx =$
$= \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \psi'(x)\,dx = \psi(x)\Big|_{-\infty}^{+\infty} = 0$ (ψ е с компактен носител)
$\Rightarrow \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x)\,dx = 0$ - това е необходимо условие

Това условие е и достатъчно. Нека $\varphi \in \mathcal{D}$ & $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x)\,dx = 0$
$\psi(x) = \int\limits_{-\infty}^{x} \varphi(\tau)\,d\tau$ е първообразна. Смисълът на твърдението е, че $\psi \in \mathcal{D}$. Действително, ако $supp(\varphi) \subset (-R,R)$ то очевидно $supp(\psi) \in (-R,R)$

2. Ако φ има първообразна $\psi \in \mathcal{D}$, то ψ е единствена.
Условието $\psi' = \varphi$ определя ψ с точност до адитивна константа. Изискването: $\psi \in \mathcal{D}$ определя тази константа еднозначно: $\psi(x) = 0$ при достатъчно голямо x.

Множеството на всички пробни функции $\varphi \in \mathcal{D}$ които имат първообразни в $\mathcal{D}$ образуват безкрайномерно векторно подпространство определено с едно линейно скаларно условие: $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x)\,dx = 0$. Това подпространство има коразмерност 1. Върху това подпространство f е напълно определен като линеен непрекъснат функционал. Определянето на f в цялото пространство $\mathcal{D}$ е задача за продължаване на линеен функционал, дефиниран в подпространство, до цялото пространство. В това има произвол който трябва да се опише (една константа при коразмерност единица) и който е естествен при търсене на неопределен интеграл.

Нека $\omega(x) = \begin{cases} c \cdot e^{\frac{-1}{1-x^2}} & , x \in (-1,1) \\ 0 & , |x| \geq 1 \end{cases}$; $\Rightarrow \omega \in \mathcal{D}$

c е избрана така, че $\int_{-\infty}^{+\infty} \omega(x)\,dx = 1$.

ω е "вектор" в $\mathcal{D}$ който е трансверзален на подпространството определено от условието $\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x)\,dx = 0$.

Всеки "вектор" $\varphi \in \mathcal{D}$ еднозначно се представя като: $\varphi = a.\omega + p(\varphi)$, $\int_{-\infty}^{+\infty} p(\varphi)(x)\,dx = 0$

Очевидно: $a = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x)\,dx \Rightarrow p(\varphi) = \varphi - a.\omega$

$p(\varphi)$ има първообразна в $\mathcal{D}$: $\psi(x) = \int_{-\infty}^{x} (\varphi(\tau) - a.\omega(\tau))\,d\tau$

Тогава: $\langle f, \varphi \rangle = \langle f, \varphi - a\omega + a\omega \rangle =$

$= \langle f, \varphi - a\omega \rangle + a \langle f, \omega \rangle = \langle f, \psi_\varphi' \rangle + a.\alpha$

$= -\langle g, \psi_\varphi \rangle + a.\alpha$

Окончателно

$g \to f$ неопределен интеграл ($f = \int g(x)\,dx$)

$\langle f, \varphi \rangle = -\langle g, \psi_\varphi \rangle$; $\psi_\varphi(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} (\varphi(\tau) - a\omega(\tau))\,d\tau$; $a = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x)\,dx$

$\to$ Коментар за фурие-преобразувание

Да разгледаме уравнението $\frac{d^n}{dx^n} u(x) = 0$

$u(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ipx} \tilde{u}(p)\,dp \Rightarrow \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ipx} (-ip)^n \tilde{u}(p)\,dp = 0$

$\Rightarrow p^n \tilde{u}(p) = 0$ – фурие образ на уравнението

$\tilde{u}(p)$ – об. функция с носител в 0. $\to$ общо решение $\tilde{u}(p)$:

$\tilde{u}(p) = \sum_{k=0}^{n-1} a_k \delta^{(k)}(x) \Rightarrow$

$u(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ipx} \sum_{k=0}^{n-1} a_k \delta^{(k)}(p)\,dp = \sum_{k=0}^{n-1} b_k x^k \to$

общо решение $u(x)$.

По същата процедура

Уравнение : $\frac{d^2u}{dx^2} + u = 0$, $u(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ipx}\tilde{u}(p)\,dp$

$\Rightarrow \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ipx}(-p^2+1)\tilde{u}(p)\,dp = 0 \Rightarrow (1-p^2)\tilde{u}(p) = 0$

фурие образ на уравнението. $\rightarrow (1-p)(1+p)\tilde{u}(p) = 0$

$\tilde{u}(p) = a_1\delta(p-1) + a_2\delta(p+1)$ – общо решение

$u(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ipx}(a_1\delta(p-1) + a_2\delta(p+1))\,dp = b_1e^{ix} + b_2e^{-ix}$

общо решение $u(x)$. (по метода на Бейли)

Уравнение $\frac{d^2u}{dx^2} - u = 0$, $u(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ipx}\tilde{u}(p)\,dp$

$\Rightarrow \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ipx}(-p^2-1)\tilde{u}(p) = 0 \Rightarrow (1+p^2)\tilde{u}(p) = 0$

фурие образ на уравнението. Няма решение в изпреемие кое обобщени функции.

Общото решение е $u(x) = b_1e^{x} + b_2e^{-x}$. Това не са бавнорастящи обобщени функции. За тях преобразуването на фурие е некоректно.

Формално, корените на $p^2+1=0$ са $p = \pm i$

$\tilde{u}(p) = a_1\delta(p-i) + a_2\delta(p+i) \Rightarrow u(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ipx}(a_1\delta(p-i) + a_2\delta(p+i))\,dp$

$= b_1e^{x} + b_2e^{-x}$

Задача

Покажете, че

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{ipx}\cdot e^{-a^2x}\,dx \equiv \mathcal{F}[e^{-a^2x^2}](p) = \frac{\sqrt{\pi}}{a}e^{-\frac{1}{4a^2}p}, \quad a>0$$

Решение

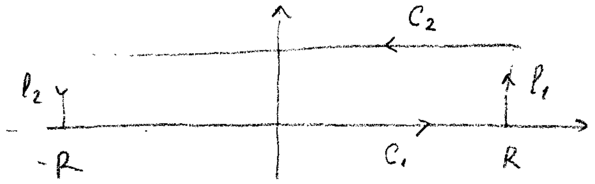
$e^{-a^2x^2}$ е бързонамаляваща функция и нейния фурие-образ е също гладка функция. $ax = -\tau$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{ipx}e^{-a^2x^2}\,dx = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{(-a^2x^2+ipx)}\,dx = \frac{1}{a}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{(-\tau^2 - i\frac{p}{a}\tau)}\,d\tau =$$

$$= \frac{1}{a}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{\left(-\tau^2 - 2\frac{ip}{2a}\tau - \left(\frac{ip}{2a}\right)^2 + \left(\frac{ip}{2a}\right)^2\right)} d\tau = $$

$$\left(\tau + \frac{ip}{2a}\right) = \zeta$$

$$= \frac{1}{a} e^{-\frac{p^2}{4a^2}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\left(\tau+\frac{ip}{2a}\right)^2} d\tau = \frac{1}{a} e^{-\frac{p^2}{4a^2}} \int_{\mathrm{Im}(\zeta)=\frac{p}{2a}} e^{-\zeta^2} d\zeta$$



Затворен контур
$C = C_1 \cup C_2 \cup l_1 \cup l_2$

По теорема на Коши, за всяко $R > 0$: $\int_C e^{-\zeta^2} d\zeta = 0$

За контурите: $l_1 \to \zeta = R + i.\rho$, $\rho \in [0, \frac{p}{2a}]$

$$|e^{-\zeta^2}| = |e^{-(R+i.\rho)^2}| = |e^{(-R^2 - 2R.\rho.i + \rho^2)}| = e^{(\rho^2 - R^2)} \xrightarrow[R\to\infty]{} 0$$

$$l_2 \to \zeta = -R + i\rho \to |e^{-\zeta^2}| = e^{(\rho^2 - R^2)} \xrightarrow[R\to+\infty]{} 0$$

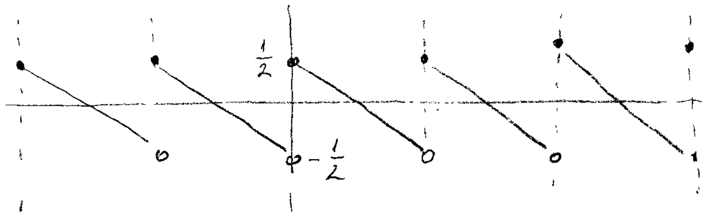
$$\Rightarrow \int_{\mathrm{Im}(\zeta)=\frac{p}{2a}} e^{-\zeta^2} d\zeta = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$$

$$\Rightarrow \mathcal{F}[e^{-a^2x^2}](p) = \frac{\sqrt{\pi}}{a} e^{-\frac{1}{4a^2}p^2}$$

→ Сумационни формули

Използваме функцията $f(x) = \frac{1}{2} - \frac{x}{2\pi}$, $x \in [0, 2\pi)$

и продължено по периодичност за $x \in (-\infty, +\infty)$



→ графика на $f(x)$

$$f'(x) = -\frac{1}{2\pi} + \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(x - 2\pi.n)$$ – като обобщена функция

(всеки скок дава по едно δ-функция)

$f(x)$ допуска развитие в ред на Фурие

$$= \frac{1}{2} - \frac{x}{2\pi} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n e^{inx} \quad , \quad x \in [0, 2\pi]$$

$$a_n = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left(\frac{1}{2} - \frac{x}{2\pi}\right) e^{-inx} dx \Rightarrow \begin{cases} a_0 = 0 \quad , n = 0 \\ a_n = \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{1}{in} \quad , n \neq 0 \end{cases}$$

$$\left\{ \begin{aligned} & \frac{1}{2\pi \cdot 2} \int_0^{2\pi} e^{-inx} dx = 0 \; ; \; -\frac{1}{2\pi} \cdot \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} x e^{-inx} dx = \\ & = \frac{1}{2\pi} \frac{1}{2\pi} \frac{1}{in} \int_0^{2\pi} x \, d e^{-inx} = \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{1}{2\pi} \frac{1}{in} x e^{-inx} \Big|_0^{2\pi} - 0 = \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{1}{in} \end{aligned} \right.$$

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \sum_{\substack{n=-\infty \\ n \neq 0}}^{+\infty} \frac{1}{in} e^{inx} \quad , \text{ диференцираме по } x$$

$$f'(x) = -\frac{1}{2\pi} + \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(x - 2\pi n) = \frac{1}{2\pi} \sum_{\substack{n=-\infty \\ n \neq 0}}^{+\infty} e^{inx}$$

$$\Rightarrow \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(x - 2\pi n) = \frac{1}{2\pi} \cdot \underbrace{e^{i0.x}}_{1} + \frac{1}{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{inx}$$

$$\Rightarrow \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(x - 2\pi n) = \frac{1}{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{inx} \quad ; \quad x \in (-\infty, +\infty)$$

$$2\pi \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(x - 2\pi n) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \mathcal{F}[\delta(p-n)](x)$$ (еквивалентен запис)

Нека $f \in S$ - бързонамаляваща функция

$$\tilde{f}(p) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ipx} f(x) dx \text{ - фурие образ}$$

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} f(2\pi n) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \cdot \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(x - 2\pi n) \cdot dx =$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{inx} dx = \frac{1}{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{inx} f(x) dx = \frac{1}{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \tilde{f}(n)$$

$$\Rightarrow \sum_{n=-\infty}^{+\infty} f(2\pi . n) = \frac{1}{2\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \tilde{f}(n)$$

Сумационна формула на Поасон

Ако стъпката не е "2π" а "a"

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(x - a.n) = \frac{1}{a} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{i \frac{2\pi}{a} n x}$$

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} f(a.n) = \frac{1}{a} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \tilde{f}\left(\frac{2\pi}{a}.n\right)$$

Ако сумационната формула се приложи за

$$f(x) = e^{-\frac{t}{4\pi^2}x^2} \longrightarrow \tilde{f}(p) = \frac{2\pi\sqrt{\pi}}{\sqrt{t}} e^{-\frac{\pi^2}{t}.p^2}$$

$$\Rightarrow \sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{-t.n^2} = \sqrt{\frac{\pi}{t}} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{\pi^2}{t}.n^2}$$

Развитие на функция по пълна ортогонална система от функции.

Петко Николов
Упражнения по ЧДУ, Физ. Ф

Ред на Фурие

Нека е зададен интервал $[a, a+T]$, $T>0$. Без ограничение можем да считаме, че това е $[0, T]$. Определяме от уравнението $\omega T = 2\pi \to \omega = \frac{2\pi}{T}$ "кръгова честота". Тогава в този интервал функциите

$\cos(n\omega x)$, $n = 0, 1, 2, \dots$; $\sin(n\omega x)$, $n = 1, 2, \dots$

образуват пълна ортогонална система и "всяка" функция $f(x)$, дефинирана в интервала $[0, T]$ може да се развие в ред

$$f(x) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n \cos(n\omega x) + b_n \sin(n\omega x)\right), \text{ където}$$

$$\begin{cases} a_n = \frac{2}{T}\int_0^T f(x)\cos(n\omega x)\,dx & , n = 0, 1, 2, \dots \\ b_n = \frac{2}{T}\int_0^T f(x)\sin(n\omega x)\,dx & , n = 1, 2, \dots \end{cases}$$

Комплексен запис

Функциите $e^{in\omega x}$ образуват пълна ортогонална система

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{in\omega x} \quad ; \quad c_n = \frac{1}{T}\int_0^T f(x) e^{-in\omega x}\,dx$$

$$\left| \begin{array}{l} c_0 = \frac{1}{2}a_0 \quad n = 0 \\ \left.\begin{array}{l} c_n + c_{-n} = a_n \\ i(c_n - c_{-n}) = b_n \end{array}\right\} n = 1, 2 \end{array} \right.$$

$$\left| \begin{array}{l} a_0 = 2c_0 \\ c_n = \frac{1}{2}(a - ib_n) \\ c_{-n} = \frac{1}{2}(a + ib_n) \end{array} \right.$$

Обща постановка

Нека $[a,b]$ интервал, $a<b$, и $r(x)>0$ при $x\in(a,b)$ е положителна функция дефинирана в този интервал.
Една система функции $\varphi_1, \varphi_2, \dots$ дефинирани в $[a,b]$ е пълна и ортогонална с тегло $r(x)$ ако "всяка" функция $f(x)$ се развива еднозначно в безкраен ред:

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty} c_n \cdot \varphi_n(x) \qquad , \text{(пълнота)} \quad \text{и}$$

$$\int_a^b \varphi_n(x)\cdot\varphi_{n'}(x)\cdot r(x)\,dx = a_n \delta_{nn'} \qquad , a_n>0 \qquad \text{(ортогоналност)}$$

Тогава пресмятането на коефициентите c_n е лесно

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty} c_n \varphi_n(x) \;\Big|\cdot \varphi_k(x)\cdot r(x) \quad \text{и интегрираме} \quad \Rightarrow$$

$$\int_a^b f(x)\cdot\varphi_k(x)\cdot r(x)\,dx = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \int_a^b \varphi_n(x)\varphi_k(x)\, r(x)\,dx =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} c_n \cdot a_n \delta_{nk} = c_k \cdot a_k$$

$$\Rightarrow \quad c_n = \frac{1}{a_n}\int_a^b f(x)\cdot\varphi_n(x)\cdot r(x)\,dx$$

Съществува един проблем наречен "Задача на Щурм-Лиувил" който дава възможност за построяване на широк клас пълни и ортогонални системи от функции които се използват в решаването на граничните задачи на линейните ЧДУ от II ред.

Задача на Щурм-Лиувил

За функции дефинирани в интервал (a,b) е зададен диференциален оператор от вида

$$L[f](x) = \frac{1}{r(x)}\left(\frac{d}{dx}\left(p(x)\frac{df}{dx}\right) - q(x)\cdot f\right)$$

където: $r(x)>0 \;, x\in(a,b)$

$p(x)>0 \;, x\in(a,b)$

$q(x)\geq 0 \;, x\in(a,b)$

$\alpha_1^2+\beta_1^2 \neq 0 \neq \alpha_2^2+\beta_2^2$

Въвеждаме множеството от функции $\quad \alpha_1 . \beta_1 \le 0, \quad \alpha_2 . \beta_2 \ge 0$

$$\mathcal{D} = \{ f \in C^2([a,b]) \mid \alpha_1 f(a) + \beta_1 f'(a) = 0 \ \& \ \alpha_2 f(b) + \beta_2 f'(b) = 0 \}$$

На краищата на интервала са зададени хомогенни гранични условия. $\to$ $\mathcal{D}$ е безкрайномерно векторно пространство. В $\mathcal{D}$ се определя скаларно произведение

$$\mathcal{D} \ni f, g \to \langle f, g \rangle = \int_a^b f(x) g(x) r(x) \, dx$$

(при $r(x) > 0 \Rightarrow$: $\langle f, f \rangle = 0 \Rightarrow f = 0$)

Търсиме решение на уравнението

$$L[f](x) = \frac{1}{r(x)} \left(\frac{d}{dx} \left(p(x) \frac{df}{dx} \right) - q(x) f \right) = \lambda f$$

в пространството D (удовлетворяващо граничните условия: $\alpha_1 f(a) + \beta_1 f'(a) = 0$; $\alpha_2 f(b) + \beta_2 f'(b) = 0$)

$f(x) = 0$ е решение. "По принцип" хомогенните гранични условия определят еднозначно решението и то е $f = 0$. По изключение, за определени стойности на λ: "собствени стойности" $\lambda_1, \lambda_2, \dots$ съществува и нетривиално решение φ_n, $n = 1, 2..$ "собствени функции" "собствени вектори". (Това е спектрална задача $L[f] = \lambda f$)

При направените предположения, в сила са твърденията:

1. Собствените стойности са реални, неположителни и прости. $\lambda_n \to \varphi_n$ и определя еднозначно с точност до множител. (собственото подпространство е едномерно)

2. Функциите $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \dots$ са пълна ортогонална система с тегло $r(x)$

Всяка достатъчно гладка функция $u(x)$ се развива в ред

$$u(x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \varphi_n(x) \quad ; \quad c_n = \frac{1}{a_n} \int_a^b u(x) \varphi_n(x) r(x) \, dx ;$$

$$\int_a^b \varphi_n(x) \varphi_{n'}(x) r(x) \, dx = a_n \delta_{nn'}$$

"Частично гладка" означава функция която в краен брой точки има краен скок, в останалото област е гладка. Тогава където $u(x)$ е гладка редът е равномерно и абсолютно сходящ. Ако в точка $x_0 \in (a, b)$ u краен скок, редът е сходящ в x_0 и

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n \varphi_n(x_0) = \frac{1}{2}\left(f(x_0-0) + f(x_0+0)\right).$$

(независимо кой е дефинирано стойността $f(x_0)$)

<u>Коментар</u>

Условията за развиване в ред по собствените функции са по-слаби, но те почти не се срещат в задачите.

<u>Уточнение</u>

Ако примерно: $p(a) = 0$ и $p'(a) > 0$ имаме слабата особеност. Ако φ_1 и φ_2 са две линейно независими решения в $C^2[a,b]$ при фиксирано λ (имаме линейно ОДУ от $\underline{II}$ ред) и $\varphi_1(a)$ е крайно, тогава задължително $\varphi_2(a) = \infty$. Тогава хомогенното условие $\alpha_1 f(a) + \beta_1 f'(a) = 0$ се замени с "естествено условие за ограниченост": "$f(a)$ да е крайно"
Това се отнася и за b (ако $p(b) = 0$ & $p'(b) < 0$)
При тези условия свойствата на собствените стойности λ и собствените функции остават същите.

(D-D) <u>Задача</u> (D-D) Дирихле - Дирихле

Намерете собствените стойности и соб. функции на

$$\ddot{f}(x) = \lambda f(x)\ ;\quad x \in [0,a]\ ;\quad f(0) = 0 = f(a)$$

<u>Решение</u> Общото решение на диф. уравнение е

1. $\ddot{f} = \alpha^2 f$, $\lambda = \alpha^2 > 0 \to f(x) = Ae^{\alpha x} + Be^{-\alpha x}$, $\alpha > 0$
2. $\ddot{f} = 0$, $\lambda = 0 \to f(x) = Ax + B$
3. $\ddot{f} = -\alpha^2 f$, $\lambda = -\alpha^2 < 0 \to f(x) = A\cos(\alpha x) + B\sin(\alpha x)$

За всеки от тези случаи проверяваме

① $\left.\begin{array}{l} f(0)=0 \\ f(a)=0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left| \begin{array}{ll} A+B & =0 \\ Ae^{\alpha a}+Be^{-\alpha a} & =0 \end{array}\right.$; $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ e^{\alpha a} & e^{-\alpha a} \end{vmatrix} =$

$= e^{-\alpha a} - e^{\alpha a} \neq 0$ при $\alpha > 0$ $\Rightarrow$ Системата има единствено решение $A = B = 0$ $\Rightarrow$ няма соб. стойности

② $f(0)=0 \longrightarrow B=0$
$f(a)=0 \longrightarrow A.a+B=0$ $\Big\}$ $A=B=0$
$\lambda=0$ не е соб. стойност

③ $f(0)=0 \longrightarrow A.1+B.0=0 \rightarrow A=0$
$f(a)=0 \longrightarrow A\cos(\alpha a)+B\sin(\alpha a)=0 \rightarrow B\sin(\alpha a)=0$

нетривиално решение, $B\neq 0$, следователно при

$\alpha a = n\pi$, $n=1,2,..$ $\rightarrow \alpha = \frac{n\pi}{a}$, $\lambda = -\left(\frac{n\pi}{a}\right)^2$

Резултат:

$\lambda_n = -\left(\frac{n\pi}{a}\right)^2$, $n=1,2,3,..$ соб. стойности

$\varphi_n(x) = \sin\left(\frac{n\pi}{a}x\right)$ соб. функции

$\int_0^a \sin\left(\frac{n\pi}{a}x\right)\cdot\sin\left(\frac{n'\pi}{a}x\right).dx = \frac{a}{2}\delta_{nn'} = \langle\varphi_n, \varphi_{n'}\rangle$

(N-N) Задача (N-N) Нойман-Нойман

Намерете соб. стойности и соб. функции на:

$\ddot{f}(x) = \lambda f(x)$; $x\in[0,a]$, $\dot{f}(0)=0$, $\dot{f}(b)=0$

Решение

Общото решение на диф. уравнение е

1. $\ddot{f} = \alpha^2 f$, $\lambda=\alpha^2>0$, $(\alpha>0)$ $\rightarrow f(x) = Ae^{\alpha x}+Be^{-\alpha x}$
2. $\ddot{f} = 0$, $\lambda=0$ $\rightarrow f(x) = Ax+B$
3. $\ddot{f} = -\alpha^2 f$, $\lambda=-\alpha^2$ $\rightarrow f(x) = A\cos(\alpha x)+B\sin(\alpha x)$

За всеки от тези случаи проверяваме

① $\dot{f}(x) = \alpha A e^{\alpha x} - \alpha B e^{-\alpha x}$

$\dot{f}(0) = 0 \longrightarrow \left| \begin{array}{l} \alpha A - \alpha B = 0 \\ \alpha A e^{\alpha a} - \alpha B e^{-\alpha a} = 0 \end{array} \right. \quad ; \quad \begin{vmatrix} \alpha & -\alpha \\ \alpha e^{\alpha a} & -\alpha e^{-\alpha a} \end{vmatrix} =$
$\dot{f}(a) = 0 \longrightarrow$

$= \alpha^2 (-e^{-\alpha a} + e^{\alpha a}) \neq 0$ при $\alpha > 0$ $\rightarrow$ няма соб стойност

② $\dot{f}(x) = A$

$\left. \begin{array}{l} \dot{f}(0) = 0 \rightarrow A = 0 \\ \dot{f}(a) = 0 \rightarrow A = 0 \end{array} \right\}$ $f(x) = B$ - решение
$\lambda_0 = 0$ - собствено стойност
$\varphi_0(x) = 1$ - избиране

③ $\dot{f}(x) = -\alpha A \sin(\alpha x) + \alpha B \cos(\alpha x)$

$\dot{f}(0) = 0 \longrightarrow -\alpha A . 0 + \alpha B . 1 = 0 \longrightarrow B = 0$

$\dot{f}(a) = 0 \rightarrow -\alpha A \sin(\alpha a) = 0$, $\alpha > 0$, $\alpha a = n\pi$

$\alpha_n = \frac{n\pi}{a}$, $n = 1, 2, 3, ..$ собствени стойности

избиране $\varphi_n(x) = \cos\left(\frac{n\pi}{a} x\right)$

Резултат

$\lambda_n = -\left(\frac{n\pi}{a}\right)^2$, $n = 0, 1, 2, 3, ..$

$\varphi_n(x) = \cos\left(\frac{n\pi}{a} x\right)$, $n = 0, 1, 2, ..$

Съотношение за ортогоналност

$\langle \varphi_0, \varphi_0 \rangle = \int_0^a 1 . dx = a$

$\langle \varphi_n, \varphi_{n'} \rangle = \int_0^a \cos\left(\frac{n\pi}{a} x\right) \cos\left(\frac{n'\pi}{a} x\right) dx = \frac{a}{2} \delta_{nn'}$

при $(n, n') \neq (0, 0)$

Понеже се използва следната конвенция

$u(x) = \frac{1}{2} c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} c_n . \cos\left(\frac{n\pi}{a} x\right)$

$c_n = \frac{2}{a} \int_0^a u(x) . \cos\left(\frac{n\pi}{a} x\right) dx$, $n = 0, 1, 2, ...$

(N-D) **Задача** (N − D)

$\ddot{f} = \lambda f \quad , x \in [0, a] , \quad \dot{f}(0) = 0, \; f(a) = 0$

За общото решение, също както в предишните задачи, проверяваме

① $\dot{f}(0) = 0 \to \quad \alpha A - \alpha B = 0$
$f(a) = 0 \to \quad A e^{\alpha a} + B e^{-\alpha a} = 0 \quad ; \begin{vmatrix} \alpha & -\alpha \\ e^{\alpha a} & e^{-\alpha a} \end{vmatrix} =$

$= \alpha (e^{-\alpha a} + e^{\alpha a}) \neq 0 \; , \alpha > 0 , \Rightarrow A = B = 0$ няма соб. ст.

② $\dot{f}(0) = 0 \to \begin{vmatrix} A = 0 \\ A . a + B = 0 \end{vmatrix} \quad A = B = 0$
$f(a) = 0 \to$ $\quad \lambda = 0$ не е соб. стойност

③ $\dot{f}(0) = 0 \to \quad \alpha . B . 1 = 0 \quad , \alpha > 0 \to B = 0$
$f(a) = 0 \to \quad A \cos(\alpha a) = 0 \to (\alpha > 0) \to \alpha a = \frac{\pi}{2} + n\pi , n = 0, 1, 2$

$$\alpha_n = \frac{(2n+1)}{2a} \pi \; , n = 0, 1, 2, . \qquad \varphi_n = B \cos(\alpha_n x)$$

Резултат

$$\lambda_n = -\left(\frac{(2n+1)\pi}{2a} \right)^2 , n = 0, 1, 2, .. \qquad \text{— соб. стойност}$$

$$\varphi_n(x) = \cos\left(\frac{(2n+1)\pi}{2a} x \right)$$

$$\langle \varphi_n , \varphi_{n'} \rangle = \int_0^a \cos\left(\frac{(2n+1)\pi}{2a} x \right) . \cos\left(\frac{(2n'+1)\pi}{2a} x \right) dx = \frac{a}{2} \delta_{nn'}$$

(D-N) **Задача** (D − N)

$\ddot{f} = \lambda f \quad , x \in [0, a] , \quad f(0) = 0, \; \dot{f}(a) = 0$

За общото решение проверяваме

① $f(0) = 0 \to \begin{vmatrix} A + B = 0 \\ \alpha A e^{\alpha a} - \alpha B e^{-\alpha a} = 0 \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ \alpha e^{\alpha a} & -\alpha e^{-\alpha a} \end{vmatrix} =$
$\dot{f}(a) = 0$

$= -\alpha (e^{-\alpha a} + e^{\alpha a}) \neq 0 \Rightarrow A = B = 0$ няма соб. стойност

② $f(0) = 0 \to \begin{vmatrix} B = 0 \\ A = 0 \end{vmatrix} \quad ; \quad \lambda = 0$ не е соб. стойност.
$\dot{f}(a) = 0 \to$

(3) $f(0)=0 \to A=0$

$f(a)=0 \to \alpha B\cos(\alpha a)=0 \to \alpha a = \frac{\pi}{2}+n\pi, \quad n=0,1,2$

$\alpha_n = \frac{2n+1}{2a}\pi \qquad (\alpha>0)$

Резултат

$\lambda_n = -\left(\frac{2n+1}{2a}\pi\right)^2, \quad n=0,1,2,\ldots$ - соб стойности

$\varphi_n = \sin\left(\frac{2n+1}{2a}\pi x\right), \quad n=0,1,2$ - соб. функ

$\langle \varphi_n, \varphi_{n'}\rangle = \int_0^a \sin\left(\frac{2n+1}{2a}\pi x\right)\sin\left(\frac{2n'+1}{2a}\pi x\right)dx = \frac{a}{2}\delta_{nn'}$

Задача

Намерете соб стойности и соб. функции

$\ddot f(x) = \lambda f(x), \quad x\in[0,a], \quad f(0)-\dot f(0)=0 \ \& \ f(a)+\dot f(a)=0$

Решение

Общото решение на уравнението е същото.

Проверяваме за отделните случаи

(1) $\lambda=\alpha^2, \alpha>0, \quad f(x)=Ae^{\alpha x}+Be^{-\alpha x}, \quad \dot f(x)=\alpha Ae^{\alpha x}-\alpha Be^{-\alpha x}$

$$\left|\begin{array}{l} f(0)-\dot f(0)=0 \to A+B-\alpha A+\alpha B=0 \\ f(a)+\dot f(a)=0 \to Ae^{\alpha a}+Be^{-\alpha a}+\alpha Ae^{\alpha a}-\alpha Be^{-\alpha a}=0 \end{array}\right.$$

$$\left|\begin{array}{l} (1-\alpha)A+(1+\alpha)B=0 \\ (1+\alpha)e^{\alpha a}\cdot A+(1-\alpha)e^{-\alpha a}B=0 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{vmatrix} (1-\alpha) & (1+\alpha) \\ (1+\alpha)e^{\alpha a} & (1-\alpha)e^{-\alpha a} \end{vmatrix} =$$

$$=(1-\alpha)^2e^{-\alpha a}-(1+\alpha)^2e^{\alpha a}\overset{?}{=}0 \Rightarrow (1-\alpha)^2-(1+\alpha)^2e^{2\alpha a}=0$$

има ли решение за $\alpha>0$? - не детерминантата е $\neq 0$

при $\alpha>0 \Rightarrow |1-\alpha|<|1+\alpha|, \ e^{2\alpha a}>1 \Rightarrow (1+\alpha)^2e^{2\alpha a}>(1-\alpha)^2$

Системата е неизродена $\Rightarrow A=B=0 \to$ няма соб. стойности

(2) $\lambda=0; \quad f(x)=Ax+B, \quad \dot f(x)=A$

$$\left|\begin{array}{l} f(0)-\dot f(0)=0 \to \\ f(a)+\dot f(a)=0 \to \end{array}\right. \left|\begin{array}{l} B-A=0 \to B=A \\ Aa+B+A=0 \to A(a+2)=0 \to A=0 \end{array}\right. \quad B=0$$

няма соб. стойности

Коментар_

Тук съществено използваме, че $a>0$. Това е важно при "ориентацие по производните". На границата ще трябва да се ориентираме наново.

(3) $f(x) = A\cos(\alpha x) + B\sin(\alpha x)$; $\dot f(x) = -\alpha A\sin(\alpha x) + \alpha B\cos(\alpha x)$

$$\left|\begin{array}{l} f(0) - \dot f(0) = 0 \longrightarrow \\ f(a) + \dot f(a) = 0 \longrightarrow \end{array}\right|\begin{array}{l} A - \alpha B = 0 \\ A\cos(\alpha a) + B\sin(\alpha a) - \alpha A\sin(\alpha a) + \alpha B\cos(\alpha a) = 0 \end{array}$$

$$\left|\begin{array}{l} A - \alpha B = 0 \\ (\cos(\alpha a) - \alpha\sin(\alpha a))A + (\alpha\cos(\alpha a) + \sin(\alpha a))B = 0 \end{array}\right.$$

Условие за съществуване на соб. стойност е детерминантата да се занулира

$$\begin{vmatrix} 1 & -\alpha \\ (\cos(\alpha a) - \alpha\sin(\alpha a)) & (\alpha\cos(\alpha a) + \sin(\alpha a)) \end{vmatrix} = 0$$

$$\alpha\cos(\alpha a) + \sin(\alpha a) + \alpha\cos(\alpha a) - \alpha^2\sin(\alpha a) = 0$$

$$(1-\alpha^2)\sin(\alpha a) + 2\alpha\cos(\alpha a) = 0 \Rightarrow \frac{\sin(\alpha a)}{\cos(\alpha a)} = \frac{2\alpha}{\alpha^2 - 1}$$

Уравнението за α е трансцендентно

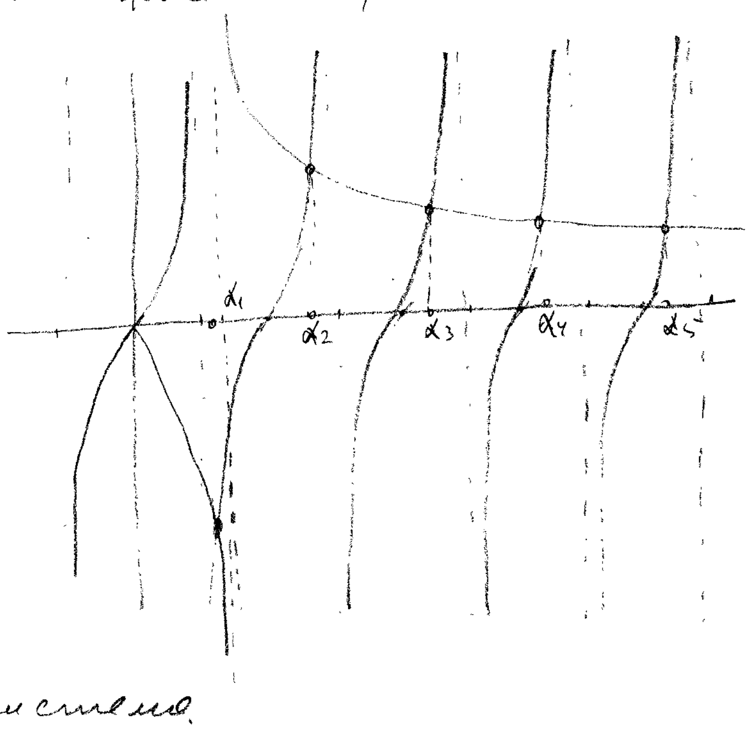
$$tg(\alpha a) = \frac{2\alpha}{\alpha+1}\cdot\frac{1}{\alpha-1}$$; $\alpha>0$ графично решаване

Получаваме дискретна редица от соб. стойности $\lambda_n = -(\alpha_n)^2$, $n = 1, 2, 3$

За тези стойности на λ системата е изродена и остава само

$A - \alpha_n B = 0$

избираме $B = 1$, $A = \alpha_n$



$\alpha_n\cos(\alpha_n x) + \sin(\alpha_n x) = \varphi_n$

пълна ортогонална система.

Коментар_

Как се осигурява знакоопределеността на собствените стойности при задачите на Щурм-Лиувил ?

$$\frac{1}{r}\left(\frac{d}{dx}\left(p(x)\,\frac{df}{dx}\right)-q(x).f\right)=\lambda f \quad ; \quad L[f]=\lambda f$$

$$\left|\begin{array}{l}\alpha_1 f(a)+\beta_1 \dot f(a)=0\\ \alpha_2 f(b)+\beta_2 \dot f(b)=0\end{array}\right. \quad ; \ x\in(a,b)$$

$$\langle L[f],f\rangle=\lambda\langle f,f\rangle \quad ; \quad \langle f,f\rangle=\int_a^b f^2(x)\,r(x)\,dx>0$$

Пресмятаме лявата страна

$$\langle L[f],f\rangle=\int_a^b \frac{1}{r}\left(\frac{d}{dx}\left(p\,\frac{df}{dx}\right)-q\,f\right)\cdot f\cdot r\cdot dx=$$

$$=\int_a^b \frac{d}{dx}\left(p\,\frac{df}{dx}\right)\cdot f\cdot dx-\underbrace{\int_a^b q(x)\,f^2(x)\,dx}_{=C_1\geq 0}=$$

$$=-C_1+p(x).\dot f(x).f(x)\Big|_a^b-\underbrace{\int_a^b p(x).\left(\dot f(x)\right)^2 dx}_{=C_2\geq 0}=$$

$$=-C_1-C_2+p(b)\,f(b)\,\dot f(b)-p(a)\,f(a)\,\dot f(a)=$$

$$=-C_1-C_2-p(b).f^2(b).\frac{\alpha_2}{\beta_2}+p(a)\,f^2(a)\,\frac{\alpha_1}{\beta_1}$$

Ако $\frac{\alpha_1}{\beta_1}<0$ и $\frac{\alpha_2}{\beta_2}>0$ лявата страна е неположителна $\Rightarrow$ λ е неположително число

$r(x)>0$ осигурява $\langle f,f\rangle\geq 0$

$q(x)>0$ осигурява $C_1\geq 0$

$p(x)>0$ осигурява $C_2\geq 0$

Изискването $\alpha_1.\beta_1\leq 0$ и $\alpha_2\,\beta_2\geq 0$ е точно съотношението което се получава когато задачата на Щурм-Лиувил възниква при разделяне на променливите. Винаги нормалната производна трябва да бъде в посока външно за областта (интервала.

$\alpha u+\beta\frac{\partial u}{\partial \vec n}=0$, $\alpha,\beta>0$ но $\vec n$ е външн.

За левия край на интервала, "a", $\frac{\partial u}{\partial \vec{n}}$ еднакво "$-f(a)$"

Задача

Намерете решение $u = u(x,y)$ на уравнението

$\Delta u = 0$ в областта $x \in (0,a)$, $y \in (0,b)$

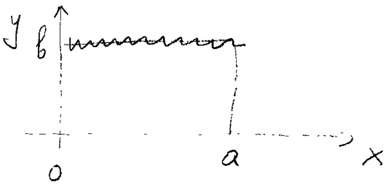
удовлетворяващо граничните условия на Дирихле

$u(0,y) = 0 = u(a,y)$

$u(x,0) = 0 \cdot u(x,b) = u_0(x)$

Разгледайте случаите $u_0(x) = 1$; $u_0(x) = \sin\left(\frac{3\pi}{a}x\right)$

Решение



1 Уравнението е хомогенно

2 Областта на решимост - коорд. паралелепипед

3 Само една двойка условия са нехомогенни

Търсим решение във вида $u(x,y) = X(x)Y(y)$

$$\underbrace{\ddot{X}\frac{1}{X}}_{\lambda} + \underbrace{\ddot{Y}\frac{1}{Y}}_{-\lambda} = 0 \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{ll} \ddot{X}(x) = \lambda X(x), & x \in (0,a) \\ \ddot{Y}(y) = -\lambda Y(y), & y \in (0,b) \end{array}$$

За двойката хомогенни условия по "x" получаваме

$\ddot{X}(x) = \lambda X(x)$, $x \in (0,a)$; $X(0) = X(a) = 0$

Това е задача на Щурм-Лиувил която е разгледана

$$\lambda_n = -\left(\frac{n\pi}{a}\right)^2 = -\alpha_n^2, \quad \alpha_n = \frac{n\pi}{a}, \quad n = 1,2,\dots$$

$X_n(x) = \sin(\alpha_n x) \rightarrow$ имаме ортонормирана система

$$\int_0^a \sin\left(\frac{n\pi}{a}x\right)\cdot\sin\left(\frac{n'\pi}{a}x\right)dx = \frac{a}{2}\delta_{nn'}$$

$\Rightarrow$ За Y: $\ddot{Y} = \alpha_n^2 Y \Rightarrow Y_n = A_n e^{\alpha_n y} + B_n e^{-\alpha_n y}$

Търсим решението във вида

$$u(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} \sin(\alpha_n x)\left(A_n e^{\alpha_n y} + B_n e^{-\alpha_n y}\right)$$

Граничното условие при $y = 0 \Rightarrow$

$$u(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} \sin(\alpha_n x)(A_n + B_n) = 0$$

$\Rightarrow A_n + B_n = 0 \quad , n = 1, 2, \dots$ защото $\sin\left(\frac{n\pi}{a}x\right)$ са независими $\Rightarrow B_n = -A_n \Rightarrow Y_n(y) = A_n\left(e^{\alpha_n y} - e^{-\alpha_n y}\right) \quad :2$

$\Rightarrow Y_n(y) = A_n \, sh(\alpha_n y)$ (Граничните условия при $x = 0, \ x = a, \ y = 0$ са удовлетворени)

$\Rightarrow u(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin(\alpha_n x) \, sh(\alpha_n y) \quad ; \quad y = b \Rightarrow$

$u(x,b) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin(\alpha_n x) \, sh(\alpha_n b) = u_0(x)$

Това е задача за развиване на функция по пълна ортогонална система функции

$$A_n \cdot sh\left(\frac{n\pi}{a} b\right) = \frac{2}{a}\int_0^a u_0(x) \sin\left(\frac{n\pi}{a}x\right) dx$$

$$A_n = \frac{2}{a \cdot sh\left(\frac{n\pi}{a} b\right)} \int_0^a u_0(x) \sin\left(\frac{n\pi}{a}x\right) dx$$

Случай: $u_0(x) = 1 \rightarrow A_n = \frac{2}{a \cdot sh\left(\frac{n\pi}{a}b\right)} \int_0^a \sin\left(\frac{n\pi}{a}x\right) dx$

$$\int_0^a \sin\left(\frac{n\pi}{a}x\right) dx \cdot \frac{n\pi}{a} \cdot \frac{a}{n\pi} = \frac{a}{n\pi}\left(-\cos\left(\frac{n\pi}{a}x\right)\Big|_{x=0}^{a}\right) =$$

$$= \frac{a}{n\pi}\left[-\cos n\pi + 1\right] = \frac{a}{n\pi}\left(1 - (-1)^n\right) = \begin{cases} 0 & , n = 2k \\ \frac{2a}{n\pi} & , n = 2k+1, \ k = 0, 1, 2, \dots \end{cases}$$

$$\Rightarrow A_{2k} = 0 \ , \quad A_{2k+1} = \frac{2}{a \cdot sh\left(\frac{2k+1}{a}\pi \cdot b\right)} \cdot \frac{2a}{(2k+1)\cdot\pi}$$

$$\Rightarrow u(x,y) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{4}{sh\left(\frac{2k+1}{a} \cdot \pi \cdot b\right) \cdot (2k+1) \cdot \pi} \sin\left(\frac{2k+1}{a}\pi x\right) sh\left(\frac{2k+1}{a}\pi \cdot y\right)$$

Случай $u_0(x) = \sin \frac{3\pi}{a} x$

$$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin\left(\frac{n\pi}{a}x\right) sh\left(\frac{n\pi}{a}b\right) = \sin\left(\frac{3\pi}{a}x\right)$$

$\Rightarrow A_n = 0$ при $n \neq 3$; $A_3 \cdot sh\left(\frac{3\pi}{a}b\right) = 1 \Rightarrow A_3 = \frac{1}{sh\left(\frac{3\pi}{a}b\right)}$

$$\Rightarrow u(x,y) = \frac{1}{sh\left(\frac{3\pi}{a}b\right)} \sin\left(\frac{3\pi}{a}x\right) sh\left(\frac{3\pi}{a}y\right)$$

Задача

Намерете решение $u = u(x,y)$ на уравнението

$\Delta u = 0$ в областта: $x \in (0,a)$, $y \in (0,b)$

удовлетворяващо граничните условия на Нойман

$-\partial_x u(0,y) = 0 = \partial_x u(a,y)$

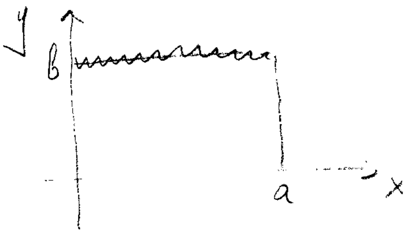
$-\partial_y u(x,0) = 0$, $\partial_y u(x,b) = V_0(x)$, $\int_0^a V_0(x)\,dx = 0$

$\cos(\frac{3\pi}{a}x)$

Коментари

1. Пишем $-\partial_x u(0,y) = 0$ и $-\partial_y u(x,0) = 0$ от принципни съображения, защото нормалната производна трябва да бъде в посока навън
2. За $V_0(x)$ има условие за решимост. Общият поток навън трябва да е нула (за хомогенно уравнение)

Решение



$\Delta u = \partial_x^2 u + \partial_y^2 u = 0$

Търсим решение от вида

$u = X(x)\,Y(y)$

$\Rightarrow \underbrace{\ddot{X}(x)\frac{1}{X(x)}}_{\lambda} + \underbrace{\ddot{Y}(y)\frac{1}{Y(y)}}_{=-\lambda} = 0$

По оста "x" възниква задача на Щурм-Лиувил

$\ddot{X}(x) = \lambda \ddot{X}(x)$, $x \in (0;a)$; $\dot{X}(0) = 0 = \dot{X}(a)$

$\lambda_n = -\left(\frac{n\pi}{a}\right)^2 = -\alpha_n^2$, $\alpha_n = \frac{n\pi}{a}$, $n = 0,1,2,3,\dots$

$X_n(x) = \cos\left(\frac{n\pi}{a}x\right)$, $n = 0,1,2,3,\dots$

Търсим решението във вида

$u(x,y) = \sum_{n=0}^{\infty} \cos\left(\frac{n\pi}{a}x\right)\cdot Y_n(y) = 1\cdot Y_0(y) + \sum_{n=1}^{\infty} \cos\left(\frac{n\pi}{a}x\right) Y_n(y)$

Като $\ddot{Y}_n(y) = -\lambda_n Y = \left(\frac{n\pi}{a}\right)^2 \cdot Y_n$, $n = 0,1,2,\dots$

$n=0$, $\lambda_0 = 0 \to \ddot{Y}_0(y) = 0 \to Y_0(y) = A_0 y + B_0$

$n = 1,2,\dots \to \ddot{Y}_n(y) = \alpha_n^2 Y_n(y) \to Y_n(y) = A_n e^{\alpha_n y} + B_n e^{-\alpha_n y}$

Получаваме

$$u(x,y) = 1\cdot(A_0 y + B_0) + \sum_{n=1}^{\infty} \sin\left(\frac{n\pi}{a}x\right)\left(A_n e^{\alpha_n y} + B_n e^{-\alpha_n y}\right)$$

гранично условие при $y = 0$

$$\partial_y u(x,0) = 1\cdot A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \sin\left(\frac{n\pi}{a}x\right)\cdot\left(\alpha_n A_n - \alpha_n B_n\right) = 0$$

$\Rightarrow A_0 = 0$ & $B_n = A_n$, $n=1,2,\ldots \to Y_n(y) = A_n \operatorname{ch}(\alpha_n y)$

(защото $1 = \cos\left(\frac{0\cdot\pi}{a}x\right)$ и $\cos\left(\frac{n\pi}{a}x\right)$, $n=1,2,\ldots$, са независими)

Получаваме:

$$u(x,y) = 1\cdot B_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos(\alpha_n x)\operatorname{ch}(\alpha_n y)$$

гранично условие при $y = b$:

$$\partial_y u(x,b) = 0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos\left(\frac{n\pi}{a}x\right)\cdot\frac{n\pi}{a}\operatorname{sh}\left(\frac{n\pi}{a}b\right) = V_0(x)$$

Задача за развитие на развитие на функция в ред.

Важна особеност

От използваната система функции ($X_0(x) = 1$, $X_n(x) = \cos\left(\frac{n\pi}{a}x\right)$, $n=1,2,\ldots$) едната липсва, това е $X_0(x) = 1$. $V_0(x)$ се развива в ред по останалите само ако коефициентът пред $X_0(x) = 1$ е нула. Това е $\frac{1}{a}\int_0^a V_0(x)\cdot 1\cdot dx = 0$. Но това е условието което сме поискали. В противен случай задачата няма решение.

$$\Rightarrow A_n\cdot\frac{n\pi}{a}\cdot\operatorname{sh}\left(\frac{n\pi}{a}b\right) = \frac{2}{a}\int_0^a V_0(x)\cdot\cos\left(\frac{n\pi}{a}x\right)\cdot dx$$

$$\Rightarrow A_n = \frac{2}{a\cdot\frac{n\pi}{a}\cdot\operatorname{sh}\left(\frac{n\pi}{a}b\right)}\int_0^a V_0(x)\cdot\cos\left(\frac{n\pi}{a}x\right)dx$$

$$u(x,y) = B_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n\cdot\cos\left(\frac{n\pi}{a}x\right)\cdot\operatorname{ch}\left(\frac{n\pi}{a}y\right)$$

B_0 остава като неопределена адитивна константа

Задача

Намерете решение $u = u(x, y)$ на уравнението

$\Delta u = 0$ в областта $x \in (0, a)$, $y \in (0, b)$

удовлетворяващо условията

$$\left.\begin{aligned} \partial_x u(0,y) &= 0 = \partial_x u(a,y) \\ u(x,0) &= 0 \;;\; \partial_y u(x,b) = V_0(x) \end{aligned}\right\} \text{ смесена задача}$$

Решение

При разделяне на променливите по оста "x" възниква задача на Щурм-Лиувил

$$\ddot{X}(x) = \lambda X(x), \quad x \in (0, a), \quad \dot{X}(0) = 0 = \dot{X}(a)$$

$$\lambda_n = -\alpha_n^2, \quad \alpha_n = \frac{n\pi}{a}, \quad n = 0, 1, 2, 3 \ldots$$

$$X_n(x) = \cos(\alpha_n x), \quad n = 0, 1, 2, 3, \ldots$$

Търсим решението във вида

$$u(x,y) = \sum_{n=0}^{\infty} \cos(\alpha_n x) \cdot Y_n(y) = 1 \cdot Y_0(y) + \sum_{n=1}^{\infty} \cos(\alpha_n x) \cdot Y_n(y)$$

$$n = 0 \to Y_0(y) = A_0 y + B_0$$

$$n = 1, 2, \ldots \to Y_n(y) = A_n e^{\alpha_n y} + B_n e^{-\alpha_n y}$$

$$\Rightarrow u(x,y) = 1 \cdot (A_0 y + B_0) + \sum_{n=1}^{\infty} \cos(\alpha_n x) \cdot (A_n e^{\alpha_n y} + B_n e^{-\alpha_n y})$$

Граничното условие при $y = 0$ →

$$u(x,0) = 1 \cdot B_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \cos(\alpha_n x)(A_n + B_n) = 0$$

$$\Rightarrow B_0 = 0 \quad \& \quad A_n + B_n = 0 \to B_n = -A_n, \quad n = 1, 2, 3 \ldots ; \to$$

$$u(x,y) = 1 \cdot A_0 y + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos\left(\frac{n\pi}{a} x\right) sh\left(\frac{n\pi}{a} y\right)$$

Граничното условие при $y = b$

$$\partial_y u(x,b) = 1 \cdot A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cdot \cos\left(\frac{n\pi}{a} x\right) \cdot \frac{n\pi}{a} b \cdot ch\left(\frac{n\pi}{a} b\right) = V_0(x)$$

$$A_0 = \frac{1}{a}\int_0^a V_0(x).1.dx$$

$$A_n = \frac{2}{a\,\frac{n\pi}{a}\,ch\left(\frac{n\pi}{a}b\right)}\int_0^a V_0(x).\cos\left(\frac{n\pi}{a}x\right).dx$$

$$\Rightarrow u(x,y) = A_0 y + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos\left(\frac{n\pi}{a}x\right) sh\left(\frac{n\pi}{a}y\right)$$

Коментар

Ако граничните задачи не са задачи на Нойман, няма ограничения за функциите определящи граничните условия

В горните задачи условието $u(x,0)=0$ е за опростяване. Естествената общност е по y - двойка нехомогенни условие

Задача

Намерете решение $u = u(x,y)$ на уравнението

$$\Delta u(x,y) = 0, \quad x \in (0,a), \; y \in (0,b)$$

$$-\partial_x u(0,y) = 0 = \partial_x u(a,y)$$

$$-\partial_y u(x,0) = V_0(x); \quad \partial_y u(x,b) = V_1(x)$$

Решение

При разделяне на променливите $u = X(x)Y(y)$

за оператора на Лаплас: $\ddot{X}\frac{1}{X} + \ddot{Y}\frac{1}{Y} = 0$

за $X(x)$ възниква задачата на Щурм-Лиувил

$$\ddot{X}(x) = \lambda X(x), \quad x \in (0,a), \quad -\dot{X}(0) = 0 = \dot{X}(a) \Rightarrow$$

$$\lambda_n = -\alpha_n^2, \quad \alpha_n = \frac{n\pi}{a}, \quad n = 0,1,2,3$$

$$X_n = \cos(\alpha_n x)$$

Търсим решението във вида

$$u(x,y) = \sum_{n=0}^{\infty} \cos\left(\frac{n\pi}{a}x\right) Y_n(y) \rightarrow$$ за Y_n получаваме

$$\ddot{Y}_n(y) - \alpha_n Y(y) = 0 \quad \Rightarrow \quad Y_0(y) = A_0 y + B_0 \qquad ; \; n = 0$$

$$(\alpha_n = \frac{n\pi}{a}) \qquad Y_n(y) = A_n e^{\alpha_n y} + B_n e^{-\alpha_n y} \qquad ; \; n = 1,2,\dots$$

$$\Rightarrow \; u(x,y) = 1.(A_0 y + B_0) + \sum_{n=1}^{\infty} \sin(\alpha_n x)(A_n e^{\alpha_n y} + B_n e^{-\alpha_n y})$$

Гранично условие при $y = 0$

$$-\partial_y u(x,0) = -A_0 - \sum_{n=1}^{\infty} \sin(\alpha_n x)(\alpha_n A_n - \alpha_n B_n) = V_0(x)$$

Гранично условие при $y = b$

$$\partial_y u(x,b) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \sin(\alpha_n x)(\alpha_n A_n e^{\alpha_n b} - \alpha_n B_n e^{-\alpha_n b}) = V_1(x)$$

при $n = 0 \rightarrow$
$$A_0 = -\frac{1}{a}\int_0^a V_0(x)\,dx$$
$$A_0 = \frac{1}{a}\int_0^a V_1(x)\,dx$$

за да има решение трябва $\int_0^a V_0(x)\,dx + \int_0^a V_1(x)\,dx = 0$

при $n = 1,2,\dots$

$$\begin{cases} -\alpha_n A_n + \alpha_n B_n = \frac{2}{a}\int_0^a V_0(x)\cos(\alpha_n x)\,dx \\ \alpha_n A_n e^{\alpha_n b} - \alpha_n B_n e^{-\alpha_n b} = \frac{2}{a}\int_0^a V_1(x)\cos(\alpha_n x)\,dx \end{cases}$$

Системата е неизродена: ($\alpha_n = \frac{n\pi}{a}$, $b > 0$) $\rightarrow$ A_n и B_n са определени еднозначно. B_0 остава неопределено но това е очакван произвол.

Коментар

Ако имаме хомогенно уравнение и произволни гранични условия задачата може да се представи като суперпозиция на случаи в които само по едно от променливите имаме двойка нехомогенни условия

Особености при задачата на Нойман

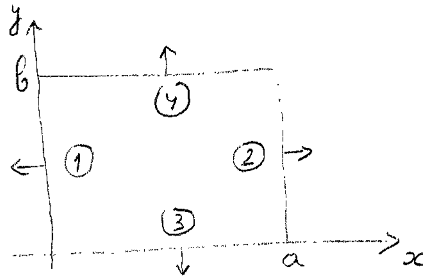
Нека имаме задачата :

$$\Delta u(x,y) = 0 \quad ; \quad x \in (0,a),\ y \in (0,b)$$

$$-\partial_x u(0,y) = V_1(y) \quad , \quad \partial_x u(a,y) = V_2(x)$$

$$-\partial_y u(x,0) = V_3(x) \quad , \quad \partial_y u(x,b) = V_4(x)$$

За да бъде задачата коректна, трябва общият поток да е нула. И нека това е изпълнено. При представяне на задачата като суперпозиция на случаи в които само по една от променливите имаме двойка нехомогенни условия това условие се нарушава



Означаваме : $\int_0^b V_1(y)\,dy = d_1, \dots, \int_0^a V_4(x)\,dx = d_4$

$d_1 + d_2 + d_3 + d_4 = 0$ условие за коректност. Изобщо $d_i \neq 0$

Ако искаме да представим задачата като суперпозиция на два случая : ($V_1 = 0 = V_2$ и $V_3 \neq 0$, $V_4 \neq 0$) и ($V_1 \neq 0$, $V_2 \neq 0$, $V_3 = 0$, $V_4 = 0$) условието $d_1 + d_2 = 0$ и $d_3 + d_4 = 0$ ще се наруши. Затова компенсираме граничните потоци посредством подходящи хармонични функции. Нека:

$$u_0(x,y) = c_1(a-x)^2 + c_2 x^2 + c_3(b-y)^2 + c_4 y^2$$

$$\Delta u_0(x,y) = 2(c_1 + c_2 + c_3 + c_4)$$

u_0 е хармонична при $c_1 + c_2 + c_3 + c_4 = 0$

За u_0 изчисляваме потоците на границата

$$\int_0^b \left(-\frac{\partial u_0}{\partial x}(0,y)\right) dy = \int_0^b 2a\,c_1\,dy = c_1\,2ab \quad ; \quad \int_0^b \frac{\partial u_0}{\partial x}(a,y)\,dy = c_2 . 2ab$$

$$\int_0^a \left(-\frac{\partial u_0}{\partial y}(x,0)\right) dx = \int_0^a 2b . c_3\,dx = c_3\,2ab \quad ; \quad \int_0^a \frac{\partial u_0}{\partial y}(x,b)\,dx = c_4\,2ab$$

Подбирайки C_i можем да получим решение на $\Delta u = 0$ с отнапред зададени потоци на границите. При общата задача на Нойман имаме гранични условия които определят потоците d_1, d_2, d_3, d_4 през границите на правоъгълника. $(d_1+d_2+d_3+d_4=0)$

Избираме:

$$u_0(x,y) = \frac{1}{2ab}\left(d_1(a-x)^2 + d_2\cdot x^2 + d_3(b-y)^2 + d_4 y^2\right)$$

Тогава за разликата $V(x,y) = u(x,y) - u_0(x,y)$ имаме:

$\Delta V(x,y) = 0$ и гранични условия

$$-\partial_x V(0,y) = V_1(y) - \frac{1}{b} d_1 \quad ; \quad \partial_x V(a,y) = V_2(y) - \frac{1}{b} d_2$$

$$-\partial_y V(x,0) = V_3(x) - \frac{1}{a} d_3 \quad ; \quad \partial_y V(x,b) = V_4(x) - \frac{1}{a} d_4$$

При тази корекция потокът през всяка граница поотделно е нула и задачата за намиране на $V(x,y)$ може да се представи като композиция на отделни случаи в които само по едно от променливите ще имаме нехомогенни гранични условия и тези случаи ще бъдат коректни.

Задача

Намерете решение $u = u(x,y)$ на уравнението

$$\Delta u(x,y) = 0 \quad ; \quad x \in (0,a), \; y \in (0,b)$$

$$\left.\begin{aligned} -\partial_x u(0,y) &= 0, & \partial_x u(a,y) &= \frac{1}{b} \\ -\partial_y u(x,0) &= 0, & \partial_y u(x,b) &= -\frac{1}{a} \end{aligned}\right\} \text{гранични условия}$$

Решение

Проверяваме условието за съществуване

$$d_1 = 0, \quad d_2 = \int_0^b \partial_x u(a,y)\,dy = \frac{1}{b}\cdot b = 1, \quad d_3 = 0, \quad d_4 = \int_0^a \partial_y u(x,b)\,dx = -\frac{1}{a}a = -1$$

В този случай коригиращата функция е

$$U_0(x,y) = \frac{1}{2ab}\left(d_2 x^2 + d_4 y^2\right) = \frac{1}{2ab}\left(x^2 - y^2\right)$$

$$V(x,y) = U - U_0 = \underline{U - \frac{1}{2ab}(x^2-y^2)}$$

$\Delta V(x,y) = 0$; за V нови гранични условия

$$-\partial_x V(0,y) = -\partial_x U(0,y) + \frac{\partial}{\partial x}\frac{1}{2ab}(x^2-y^2)\Big|_{x=0} = 0$$

$$\partial_x V(a,y) = \partial_x U(a,y) - \frac{\partial}{\partial x}\frac{1}{2ab}(x^2-y^2)\Big|_{x=a} = \frac{1}{b} - \frac{1}{b} = 0$$

$$-\partial_y V(x,0) = -\partial_y U(x,0) + \frac{\partial}{\partial y}\frac{1}{2ab}(x^2-y^2)\Big|_{y=0} = 0$$

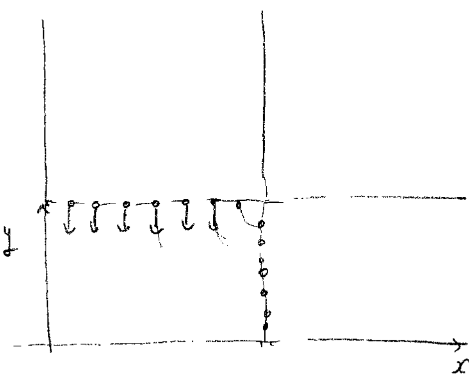
$$\partial_y V(x,b) = \partial_y U(x,b) - \frac{\partial}{\partial y}\frac{1}{2ab}(x^2-y^2)\Big|_{y=b} = -\frac{1}{a} + \frac{1}{a} = 0$$

$\Rightarrow$ За функцията $V(x,y)$ получаваме хомогенни гранични условия за цялата граница $\Rightarrow V = \text{const}$

$$\Rightarrow U(x,y) = \text{const} + \frac{1}{2ab}(x^2-y^2)$$

Коментар

Това решение описва ламинарното "завиване" на прав ъгъл



$$\operatorname{grad} U = \operatorname{grad}\left(\frac{1}{2ab}(x^2-y^2)\right) = \frac{1}{ab}(x, -y)$$

Траекториите на частиците се определят от системата ОДУ

$$\begin{cases} \dot{x}(s) = x \\ \dot{y}(s) = -y \end{cases} \qquad \begin{cases} x = \alpha e^{s} \\ y = \beta e^{-s} \end{cases}$$

с начални условие:

$$\begin{cases} x(0,\alpha,\beta) = \tau \\ y(0,\alpha,\beta) = b \end{cases} \quad \begin{matrix} \alpha = \tau \\ \beta = b \end{matrix} \qquad \begin{cases} x = \tau e^{s} \\ y = b e^{-s} \end{cases} \qquad \begin{cases} x = a \to a = \tau e^{s_0}, \; s_0 = \ln\frac{a}{\tau} \\ y(s_0) = \frac{b}{a}\tau \end{cases}$$

траектория започваща от $x = \tau$ ще напусне другата стена при $y = \frac{b}{a}\tau$, $s_0 = \ln\frac{a}{\tau}$ - време за напускане.

Обобщение: Нехомогенно уравнение

Може да се третира по два начина

I начин (директно решаване) Примерна задача

Задача

Намерете решение $u = u(x,y)$ на уравнението

$$\Delta u(x,y) = -f(x,y) \quad , \quad x \in (0,a), \; y \in (0,b) \; ;$$

$$u(0,y) = 0 = u(a,y)$$

$$u(x,0) = g(x), \quad u(x,b) = h(x)$$

Решение

Само по едно от променливите, y, имаме двойка нехомогенни условия. При разделяне на променливите, за оператора на Лаплас, за променливата "x" възниква задача на Щурм-Лиувил

$$u(x,y) = X(x).Y(y) \longrightarrow \quad \ddot{X}(x)\frac{1}{X} + \ddot{Y}\frac{1}{Y} = 0$$

$$\ddot{X}(x) = \lambda X(x) \quad , \quad x \in (0,a) \, , \; X(0) = 0 = X(a)$$

$$\lambda_n = -\alpha_n^2 \, , \; \alpha_n = \frac{n\pi}{a} \, , \quad n = 1,2,3,\dots$$

$$X_n(x) = \sin(\alpha_n x)$$

Търсим решение във вида

$$u(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} \sin(\alpha_n x).Y_n(y) \Rightarrow$$

$$\Delta\Big(\sum_{n=1}^{\infty} \sin(\alpha_n x).Y_n(y)\Big) = -f(x,y)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\big(\ddot{Y}_n(y) - \alpha_n^2 Y_n(y)\big).\sin(\alpha_n x) = -f(x,y)$$

Развиваме $f(x,y)$ "само по x"

$$f(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(y)\sin\Big(\frac{n\pi}{a}x\Big) \quad , \text{ където}$$

$$f_n(y) = \frac{2}{a}\int_0^a f(x,y)\sin\Big(\frac{n\pi}{a}x\Big)dx \quad \Rightarrow$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\ddot{Y}_n(y)-\left(\frac{n\pi}{a}\right)^2 Y(y)\right)\cdot \sin\left(\frac{n\pi}{a}x\right) = -\sum_{n=1}^{\infty} f_n(y)\sin\left(\frac{n\pi}{a}x\right)$$

$$\Rightarrow \ddot{Y}_n(y) - \alpha_n^2 Y_n(y) = -f_n(y), \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

линейно ОДУ, II ред, постоянни коефициенти, нехомогенно

Общото решение е едно частно решение плюс общото решение на хомогенното уравнение

$A_n e^{\alpha_n y} + B_n e^{-\alpha_n y}$ – общо решение на хом. ур.

едно частно решение. Обща процедура

Уравнение: $\ddot{\varphi}(y) + c_1\dot{\varphi}(y) + c_2\varphi(y) = f(y)$

Намерете решение $\varphi(y)$ на хомогенното уравнение с начални условия $\varphi(0) = 0$, $\dot{\varphi}(0) = 1$. Тогава

$\int_0^y \varphi(y-\tau) f(\tau)\,d\tau$ е решение на нехомогенното уравнение

В нашия случай: $\ddot{Y}_n(y) - \alpha_n^2 Y_n(y) = -f_n(y)$

$\varphi(y) = Ae^{\alpha_n y} + Be^{-\alpha_n y}$; $\varphi(0) = 0$, $\dot{\varphi}(0) = 1 \Rightarrow$

$\varphi = \frac{1}{\alpha_n}\operatorname{sh}(\alpha_n y) \Rightarrow -\int_0^y \frac{1}{\alpha_n}\operatorname{sh}\alpha_n(y-\tau) f_n(\tau)\,d\tau$ –

частно решение

$$Y_n(y) = A_n e^{\alpha_n y} + B_n e^{-\alpha_n y} - \int_0^y \frac{1}{\alpha_n}\operatorname{sh}\alpha_n(y-\tau) f_n(\tau)\,d\tau$$

Гранични условия при $y = 0$

$$u(x,0) = \sum_{n=1}^{n} Y_n(0)\cdot\sin\left(\frac{n\pi}{2}x\right) = g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} g_n\cdot\sin\left(\frac{n\pi}{a}x\right)$$

$g_n = \frac{2}{a}\int_0^a g(x)\sin\left(\frac{n\pi}{a}x\right)dx$; $\rightarrow Y_n(0) = g_n$

Гранични условие при $y = b$

$$u(x,b) = \sum_{n=1}^{n} Y_n(b)\cdot\sin\left(\frac{n\pi}{2}x\right) = h(x) = \sum_{n=1}^{\infty} h_n\cdot\sin\left(\frac{n\pi}{a}x\right)$$

$h_n = \frac{2}{a}\int_0^a h(x)\sin\left(\frac{n\pi}{a}x\right)dx$. $\rightarrow Y_n(b) = h_n$

За $Y_n(y)$ получаваме

$$Y_n(y) = A_n e^{\lambda_n y} + B_n e^{-\lambda_n y} - \int_0^y \frac{1}{\lambda_n} \operatorname{sh}\lambda_n(y-\tau) f_n(\tau)\,d\tau$$

$$\left| \begin{array}{l} Y_n(0) = g_n \\ Y_n(b) = h_n \end{array} \right\} \Rightarrow \left| \begin{array}{l} A_n + B_n = g_n \\ A_n e^{\lambda_n b} + B_n e^{-\lambda_n b} - \int_0^b \frac{1}{\lambda_n} \operatorname{sh}\lambda_n(b-\tau) f_n(\tau)\,d\tau = h_n \end{array} \right.$$

Линейната система е неизродена и винаги (A_n, B_n), т.е. $Y_n(y)$ е еднозначно определено.

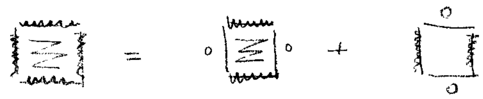
По пром. "x" хомогенните условия могат да бъдат за всяка гранична задача

Коментар

Ако за областта $x \in (0,a)$, $y \in (0,b)$ имаме нехомогенно уравнение с произволни гранични условия представяме задачите като суперпозиция. Примерно:

нехомогенно уравнение и по "y" нехомогенни & по "x" хомогенни

плюс: хомог. уравнение, по "y" хомогенни & по "x" нехомогенни.



II начин

Намираме (с налучкване, досещане) какво да е решение $U_0(x,y)$ на нехомогенното уравнение:

$\Delta U_0(x,y) = -f(x,y)$. Тогава $V(x,y) = U(x,y) - U_0(x,y)$ удовлетворява хомогенното уравнение $\Delta V(x,y) = 0$ и нови, преизчислени гранични условия.

$$V(0,y) = U(0,y) - U_0(0,y) \;;\; V(a,y) = U(a,y) - U_0(a,y)$$
$$V(x,0) = U(x,0) - U_0(x,0) \;;\; V(x,b) = U(x,b) - U_0(x,b)$$

След това използваме методите за решаване на хомогенните ЧДУ.

Задача

Намерете решения $u = u(x,y)$ на уравнението

$\Delta u(x,y) = 2(x^2+y^2),\ x \in (0,a),\ y \in (0,b)$

$\left.\begin{array}{l} u(0,y) = 0 = u(a,y) \\ u(x,0) = 0 = u(x,b) \end{array}\right\}$ гранични условие

Решение

I начин

По променливата "x" двойка хомогенни условия

Търсим решение във вида

$$u(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} \sin\left(\frac{n\pi}{a}x\right) \cdot Y_n(y)$$

$$2(x^2+y^2) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(y) \sin\left(\frac{n\pi}{a}x\right) \ ; \ f_n(y) = \frac{2}{a}\int_0^a 2(x^2+y^2)\sin\left(\frac{n\pi}{a}x\right)dx$$

от $\Delta u = 2(x^2+y^2)$ получаваме

$$\ddot{Y}_n(x) - \alpha_n Y_n(x) = f_n(y) \quad ; \ \alpha_n = \frac{n\pi}{a} \quad , \ n = 1,2,3,\dots$$

$$Y_n(y) = A_n e^{\alpha_n y} + B_n e^{-\alpha_n y} + \int_0^y \frac{1}{\alpha_n} \operatorname{sh}\alpha_n(x-\tau) \cdot f_n(\tau)\,d\tau$$

Гранични условия

$u(x,0) = 0 \to Y_n(0) = 0 \to A_n + B_n = 0$

$u(x,b) = 0 \to Y_n(b) = 0 \to A_n e^{\alpha_n b} + B_n e^{-\alpha_n b} + \int_0^b \frac{1}{\alpha_n}\operatorname{sh}(x-\tau) f_n(\tau)\,d\tau = 0$

A_n и B_n се определят еднозначно

II начин

Досещаме се, че $u_0 = x^2y^2$ е решение на уравнението

$\Delta(x^2y^2) = 2(x^2+y^2)$. Полагаме $V(x,y) = u(x,y) - x^2y^2$

Преизчисляваме граничните условия

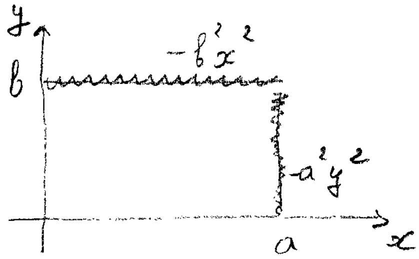
$V(0,y) = u(0,y) - x^2y^2\big|_{x=0} = 0 \ ; \ V(a,y) = 0 - a^2y^2 = -a^2y^2$

$V(x,0) = 0 - 0 = 0 \qquad ; \ V(x,b) = 0 - b^2x^2 = -b^2x^2$

За $V(x,y)$ получаваме задачата

$$\Delta V(x,y) = 0$$

$$\boxed{\begin{aligned} &V(0,y) = 0 \;;\; V(a,y) = -a^2y^2 \\ &V(x,0) = 0 \;;\; V(x,b) = -b^2x^2 \end{aligned}}$$



$V(x,y)$ е суперпозиция на две решения

$$V(x,y) = f(x,y) + g(x,y) \quad ; \quad \Delta f(x,y) = 0 \;\&\; \Delta g(x,y) = 0$$

1. За $f(x,y)$: гранични условия

$$\boxed{\begin{aligned} &f(0,y) = 0 = f(a,y) \\ &f(x,0) = 0 \;,\; f(x,b) = -b^2x^2 \end{aligned}}$$

$$\to f(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin\left(\frac{n\pi}{a}x\right) sh\left(\frac{n\pi}{a}y\right)$$

$$f(x,b) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin\left(\frac{n\pi}{a}x\right) sh\left(\frac{n\pi}{a}b\right) = -b^2x^2$$

$$\to A_n = \frac{-2b^2}{a \cdot sh\left(\frac{n\pi}{a}b\right)} \int_0^a x^2 \sin\left(\frac{n\pi}{a}x\right) dx$$

2. За $g(x,y)$: гранични условия

$$\boxed{\begin{aligned} &g(0,y) = 0 \;,\; g(a,y) = -a^2y^2 \\ &g(x,0) = 0 = g(x,b) \end{aligned}}$$

$$\to g(x,y) = \sum_{n=1}^{n} B_n \sin\left(\frac{n\pi}{b}y\right) sh\left(\frac{n\pi}{b}x\right)$$

$$g(a,y) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin\left(\frac{n\pi}{b}y\right) sh\left(\frac{n\pi}{b}a\right) = -a^2y^2$$

$$\to B_n = \frac{-2a^2}{b\, sh\left(\frac{n\pi}{b}a\right)} \int_0^b y^2 \sin\left(\frac{n\pi}{b}y\right) dy$$

$$\Rightarrow u(x,y) = f(x,y) + g(x,y) + x^2y^2$$

Пенко Николов
Упражнения по Ч.Д.У., Фз.Ф.

Параболично уравнение

$$\Delta u(\vec{x}, t) - a\,\partial_t u = -d(\vec{x}, t)\ ;\ x \in V \subset \mathbb{R}^n,\ t \in (t_0, \infty)$$

Допълнителни условия

$$u(\vec{x}, t_0) = u_0(\vec{x}),\quad x \in V \quad \text{начално условие}$$

$$\left[\begin{array}{l} u(\vec{x}, t) = u_S(\vec{x}, t) \\ \dfrac{\partial u}{\partial \vec{n}}(\vec{x}, t) = V_S(\vec{x}, t) \\ \dfrac{\partial u}{\partial \vec{n}}(\vec{x}, t) + \alpha(\vec{x}, t).u = W_S(\vec{x}, t) \end{array}\right\}\quad \begin{array}{l} x \in S = \partial V \\ t \in (t_0, \infty) \end{array}$$

гранични задачи

Най-прост случай - "едномерно пространство"

<u>Типична задача</u>

Намерете решение $u = u(x,t)$ на уравнението

$$\partial_x^2 u(x,t) - a\,\partial_t u = -d(x,t),\quad x \in (0, l),\ t \in (0, \infty)$$

удовлетворяващо допълнителните условия

$$u(x, 0) = u_0(x)$$

$$u(0, t) = 0 = u(l, t) \quad \text{хомогенни гранични условия.}$$

<u>Решение</u>

Диференциалният оператор допуска разделяне на променливите

$u(x, t) = X(x)\,T(t)$ в хомогенното уравнение

възниква задача на Щурм Лиувил:

$$\ddot{X}\frac{1}{X} - a\,\dot{T}\frac{1}{T} = 0 \quad \to$$

$$\ddot{X}(x) = \lambda X(x),\quad x \in (0, l),\quad X(0) = 0 = X(l) \quad \Rightarrow$$

$$\left|\begin{array}{l} \lambda_n = -\alpha_n^2,\ \alpha_n = \dfrac{n\pi}{l},\quad n = 1, 2, 3, \ldots \\ X_n(x) = \sin(\alpha_n x) \end{array}\right.$$

Търсим решение от вида

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right).T_n(t),$$

Заместваме в уравнението

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} - a\frac{\partial}{\partial t}\right)\sum_{n=1}^{\infty} T_n(t)\sin\left(\frac{n\pi}{\ell}x\right) = -d(x,t)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(-a\dot{T}_n(t) - \alpha_n^2 T_n(t)\right)\sin\left(\frac{n\pi}{\ell}x\right) = -d(x,t) = -\sum_{n=1}^{\infty} d_n(t)\sin\left(\frac{n\pi}{\ell}x\right)$$

$$d_n(t) = \frac{2}{\ell}\int_0^{\ell} d(x,t)\sin\left(\frac{n\pi}{\ell}x\right)dx$$

$$\Rightarrow -a\dot{T}_n(t) - \alpha_n^2 T_n(t) = -d_n(t) \qquad , n = 1,2,3,.$$

$$\Rightarrow \dot{T}_n(t) + \frac{\alpha_n^2}{a}T_n(t) = \frac{1}{a}d_n(t)$$

Общо решение на хом. уравнение $\Rightarrow A_n e^{-\frac{\alpha_n^2}{a}t}$

Частно решение на нехомогенното уравнение:

$u(t) = e^{-\frac{1}{a}\alpha_n^2 t}$ е реш. на хом. ур.: $u(0) = 1$

Тогава $\int_0^t e^{-\frac{1}{a}\alpha_n^2(t-\tau)} \cdot \frac{1}{a}d_n(\tau)d\tau$ е частно решение

на нехомогенното уравнение $\Rightarrow$

$$T_n(t) = A_n e^{-\frac{1}{a}\alpha_n^2 t} + \frac{1}{a}\int_0^t e^{-\frac{1}{a}\alpha_n^2(t-\tau)} d_n(\tau)d\tau$$

Константите A_n се определят от началното условие

$$u(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} T_n(0)\sin\left(\frac{n\pi}{\ell}x\right) = u_0(x) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin\left(\frac{n\pi}{\ell}x\right)$$

$\Rightarrow T_n(0) = B_n \Rightarrow A_n = B_n$. Окончателно:

$$\boxed{\begin{aligned} u(x,t) &= \sum_{n=1}^{\infty}\left(B_n e^{-\frac{1}{a}\alpha_n^2 t} + \frac{1}{a}\int_0^t e^{-\frac{1}{a}\alpha_n^2(t-\tau)} d_n(\tau)d\tau\right)\sin(\alpha_n x) \\ d(x,t) &= \sum_{n=1}^{\infty} d_n(t)\sin(\alpha_n x), \quad d_n(t) = \frac{2}{\ell}\int_0^{\ell} d(x,t)\sin(\alpha_n x)dx \\ u_0(x) &= \sum_{n=1}^{\infty} B_n\sin(\alpha_n x), \quad B_n = \frac{2}{\ell}\int_0^{\ell} u_0(x)\sin(\alpha_n x)dx \\ \alpha_n &= \frac{n\pi}{\ell} \end{aligned}}$$

Коментар

Тази схема може да се използва при всяка гранична задача ако граничните условия са хомогенни.
Посоченото частно решение може да бъде заменено с по удобно в различни конкретни случаи.

Задача

Конкретен случай на предишната $f(x,t) = 1$

$$\partial_x^2 u(x,t) - a\,\partial_t u = -1 \quad , \; x \in (0,l) \quad , t \in (0,\infty)$$

$$u(0,t) = 0 = u(l,t)$$

$$u(x,0) = u_0(x)$$

Решение

физически смисъл - равномерно загряване на хомогенна проводяща "пръчка". Двата края се потапят с температура 0. Топлообменът може да става само на краищата.

$$1 = \sum_{n=1}^{\infty} d_n \sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right) \implies d_n = \frac{2}{l}\int_0^l 1.\sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right)dx =$$

$$= \frac{2}{l}\frac{l}{n\pi}\left(-\cos\left(\frac{n\pi}{l}x\right)\Big|_{x=0}^{l}\right) = \frac{2}{n\pi}\left(1-(-1)^n\right) = \begin{cases} 0 & , n = 2k \\ \dfrac{4}{(2k+1)\pi} & , n = 2k+1 \end{cases}$$

$k = 0, 1, 2,$

Уравнението за $T_n(t)$ е

$$\dot{T}_n(t) + \frac{\alpha_n^2}{a} T_n(t) = \frac{1}{a} d_n = const$$

Частното решение е $T_n = C_n = const \to \frac{1}{a}\alpha_n^2 \cdot C_n = \frac{1}{a} d_n$

$$\Rightarrow C_n = \frac{d_n}{\alpha_n^2} \quad \Rightarrow T_n(t) = A_n e^{-\frac{1}{a}\alpha_n^2 t} + \frac{d_n}{\alpha_n^2}$$

Началното условие (означение на предишната зад.) води до

$$T_n(0) = A_n + \frac{d_n}{\alpha_n^2} = B_n \quad \Rightarrow \quad A_n = B_n - \frac{d_n}{\alpha_n^2}$$

$$\Rightarrow T_n(t) = B_n e^{-\frac{1}{a}\alpha_n^2 t} + \frac{d_n}{\alpha_n^2}\left(1 - e^{-\frac{1}{a}\alpha_n^2 t}\right)$$

$$\Rightarrow u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(B_n e^{-\frac{1}{a}\alpha_n^2 t} + \frac{\alpha_n}{\alpha_n^2}\left(1 - e^{-\frac{1}{a}\alpha_n^2 t}\right)\right) \sin(\alpha_n x)$$

$$\alpha_n = \frac{n\pi}{l}$$

Влиянието на началното условие е чрез коефициенти B_n. То бързо затихва и $u(x,t)$ клони към стационарно разпределение. Ако $u_0(x) = 0 \Rightarrow B_n = 0$

Какво е асимптотичното поведение при $t \to +\infty$?

То не зависи от началното температурно разпределение и е:

$$\lim_{t\to\infty} u(x,t) = u(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha_n}{\alpha_n^2} \sin(\alpha_n x) =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{4}{(2k+1)\pi} \cdot \frac{l^2}{(2k+1)^2\pi^2} \sin\left(\frac{2k+1}{l}\pi x\right) \Rightarrow$$

$$u(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{4l^2}{(2k+1)^3\pi^3} \sin\left(\frac{2k+1}{l}\pi x\right)$$

От друга страна равновесната температура $u(x)$ удовлетворява уравнението

$$\partial_x^2 u(x) = -1, \quad x \in (0, l), \quad u(0) = 0 = u(l)$$

$$\Rightarrow u(x) = -\frac{1}{2}x^2 + Ax + B \Rightarrow \left| \begin{array}{l} u(0) = 0 \to B = 0 \\ u(l) = 0 \to -\frac{1}{2}l^2 + Al = 0 \end{array} \right.$$

$$\Rightarrow A = \frac{l}{2} \Rightarrow u(x) = -\frac{1}{2}x^2 + \frac{l}{2}x = \frac{1}{2}x(l-x)$$

$$\Rightarrow u(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{4l^2}{(2k+1)^3\pi^3} \sin\left(\frac{2k+1}{l}\pi x\right) = \frac{1}{2}x(l-x)$$

→ Задача

Намерете решение $u = u(x,t)$ на уравнението

$$\partial_x^2 u - \partial_t u = -1 \quad , \ x \in (0, l), \ t \in (0, +\infty)$$

$$-\partial_x u(0,t) = 0 = \partial_x u(l,t)$$

$$u(x,0) = u_0(x)$$

Разгледайте случаите $u_0(x) = \cos(\frac{\pi}{l} x)$; $u_0(x) = 0$

Решение

физически смисъл - равномерно нагряване на топлинно изолиран в двата края хомогенен полупроводящ прът.

От разделяне на променливите в диференциалния оператор възниква задача на Щурм - Лиувил.

$$\ddot{X}(x) = \lambda X(x), \quad x \in (0, l), \quad \dot{X}(0) = 0 = \dot{X}(l)$$

$$\lambda_n = -\alpha_n^2, \ \alpha_n = \frac{n\pi}{l} \ , n = 0, 1, 2, 3,$$

$$X_n(x) = \cos(\alpha_n x)$$

Търсим решение от вида

$$u(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} T_n(t) \cos(\alpha_n x)$$, заместваме в ур.

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{\partial}{\partial t}\right) u = \sum_{n=0}^{\infty} \left(-\dot{T}_n(t) - \alpha_n^2 T_n(t)\right) \cos(\alpha_n x) = -1$$

Сега $1 = \cos(0.x)$ е едно от базисните функции

$$1 = \sum_{n=0}^{\infty} d_n \cos\left(\frac{n\pi}{l} x\right) \rightarrow d_0 = 1, \quad d_n = 0, \ n = 1, 2, 3, \dots$$

уравнение за T_n:

$$n = 0 \rightarrow \dot{T}_n(t) = 1 \Rightarrow T_0(t) = t + A_0$$

$$n = 1, 2, 3, \dots \rightarrow \dot{T}_n(t) + \alpha_n^2 T_n(t) = 0 \Rightarrow T_n(t) = A_n e^{-\alpha_n^2 t}$$

$$u(x,t) = (t + A_0) + \sum_{n=1}^{\infty} A_n e^{-\alpha_n^2 t} \cos(\alpha_n x)$$

Начално условие

1. $u(x,0) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos(\alpha_n x) = u_0(x) = \sum_{n=0}^{\infty} B_n \cos(\alpha_n x)$

$$\Rightarrow A_n = B_n$$

$$u(x,0) = t + B_0 + \sum_{n=1}^{\infty} B_n e^{-\alpha_n^2 t}$$

Непрекъснатото нагряване, като различията дължащи се на началната неравномерност изчезват

2. Ако $u_0(x) = \cos(\frac{\pi}{l}x)$

$$u(x,0) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos(\frac{n\pi}{l}x) = \cos(\frac{\pi}{l}x)$$

Дясното страна е едно от базисните функции $\Rightarrow$

$$A_1 = 1, \quad A_n = 0, \; n = 0, 2, 3, 4, ..$$

$$\Rightarrow u(x,t) = t + 1 \cdot e^{-(\frac{\pi}{l})^2 t} \cos(\frac{\pi}{l}x)$$

3. Ако $u_0(x) = 0$

$$u(x,0) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos(\frac{n\pi}{l}x) = 0$$

$\Rightarrow A_n = 0$, $n = 0, 1, 2, 3, ..$; (функциите $\cos(\frac{n\pi}{l}x)$ са независими, $n = 0, 1, 2 ..$)

$$\Rightarrow u(x,t) = t$$

Равномерно нагряване на пръчка с топлоизолирани краища която при $t=0$ е имала температура 0

Обобщение. Нехомогенни гранични условия

Задача (Обща схема)

Намерете решение $u = u(x,t)$ на уравнението

$$\partial_x^2 u - a\,\partial_t u = -d(x,t), \quad x \in (0,l), \; t \in (0,\infty)$$

$$u(x,0) = u_0(x)$$

$$u(0,t) = \mu_1(t) \; ; \; u(l,t) = \mu_2(t)$$

Решение

Хомогенизираме граничните условия. Намираме функция $\tilde{u}(x,t)$ такава, че

$$\tilde{u}(0,t)=\mu_1(t), \quad \tilde{u}(l,t)=\mu_2(t)$$

(да удовлетворява само граничните условия)

D-D

Примерно: $\tilde{u}(x,t) = \mu_1(t) + \frac{x}{l}\left(\mu_2(t)-\mu_1(t)\right)$

Полагаме $V(x,t) = u(x,t) - \tilde{u}(x,t)$

функцията V удовлетворява уравнението:

$$\partial_x^2 V - a\,\partial_t V = -f(x,t) - \left(\partial_x^2 \tilde{u} - a\,\partial_t \tilde{u}\right)$$

$$\left(D[u] = -f \Rightarrow D[V] = D[u-\tilde{u}] = D[u] - D[\tilde{u}] = -f - D[\tilde{u}] \right)$$

и началното условие

$$V(x,0) = u(x,0) - \tilde{u}(x,0) = u_0(x) - \tilde{u}(x,0)$$

Граничните условия за V са хомогенни по построение

$$V(0,t) = u(0,t) - \tilde{u}(0,t) = \mu_1(t) - \mu_1(t) = 0$$
$$V(l,t) = u(l,t) - \tilde{u}(l,t) = \mu_2(t) - \mu_2(t) = 0$$

Намираме $V(x,t)$ както предишните задачи

Тогава $u(x,t) = V(x,t) + \tilde{u}(x,t)$

Задача

Намерете решение $u=u(x,t)$ на уравнението

$$\partial_x^2 u - \partial_t u = 0 \quad \text{в областта: } x\in(0,l),\ t\in(0,+\infty)$$

удовлетворяващо допълнителните условия

$u(x,0)=0$

$u(0,t)=0$, ① $u(l,t)=t$, ② $u(l,t)=1$

③: $-\partial_x u(0,t)=0$, $u(l,t)=1$

Решение

Случай ①: Хомогенизираща функция $\tilde{u} = \frac{xt}{l}$

$V(x,t) = u(x,t) - \frac{1}{l}xt$

$\Rightarrow \partial_x^2 V - \partial_t V = 0 - \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\frac{xt}{l}\right) - \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{xt}{l}\right)\right) = \frac{x}{l}$

$\Rightarrow \partial_x^2 V - \partial_t V = \frac{x}{l}$, "нов източник" за $V(x,t)$

Ново начално условие

$V(x,0) = u(x,0) - \frac{x.t}{l}\Big|_{t=0} = 0$

Граничните условие за V са хомогенни

$V(0,t) = 0, \; V(l,t) = 0$

Продължаваме по описания начин

При разделяне на променливите $V = X(x)T(t)$

възниква задача на Щурм-Лиувил.

$\ddot{X}(x) = \lambda X(x), \quad x \in (0,l) \quad , \quad X(0) = X(l) = 0$

$\lambda_n = -\alpha_n^2, \quad \alpha_n = \frac{n\pi}{l} \quad , n = 1,2,3,.$

$X_n(x) = \sin(\alpha_n x)$

Търсим решение във вида

$V(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} T_n(t) \sin(\alpha_n x)$, заместваме в ур

$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \left(-\dot{T}_n(t) - \alpha_n^2 T_n(t)\right) \sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right) = \frac{x}{l} = \sum_{n=1}^{\infty} d_n \sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right)$

$d_n = \frac{2}{l}\int_0^l \frac{x}{l} \sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right) dx$

$n \to \quad \dot{T}_n(t) + \alpha_n^2 T_n(t) = -d_n \quad ; \quad c_n = -\frac{d_n}{\alpha_n^2}$ частно решение

$T_n(t) = A_n e^{-\alpha_n^2 t} - \frac{d_n}{\alpha_n^2}$, общо решение за $T_n(t)$

$$V(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(A_n e^{-\alpha_n^2 t} - \frac{\alpha_n}{\alpha_n^2} \right) \sin(\alpha_n x)$$

Начално условие за V:

$$V(x,0) = \sum \left(A_n - \frac{\alpha_n}{\alpha_n^2} \right) \sin(\alpha_n x) = 0$$

$$\Rightarrow A_n - \frac{\alpha_n}{\alpha_n^2} = 0 \Rightarrow \quad A_n = \frac{\alpha_n}{\alpha_n^2}, \quad n = 1,2,3\ldots$$

$$\Rightarrow V(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha_n}{\alpha_n^2} \left(e^{-\alpha_n^2 t} - 1 \right) \sin(\alpha_n x)$$

$$\Rightarrow u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha_n}{\alpha_n^2} \left(e^{-\alpha_n^2 t} - 1 \right) \sin(\alpha_n x) + \frac{xt}{\ell} \quad ; \alpha_n = \frac{n}{\ell}$$

Асимптотично поведение при $t \to \infty$

$$u_{as}(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{-\alpha_n}{\alpha_n^2} \sin(\alpha_n x) + \frac{x \cdot t}{\ell}$$

Асимптотичното веденив на $u(x,t)$, това е равновесното поведение на V, т.е.

$V(x) = \lim_{t \to \infty} V(x,t)$, $V(x)$ е решение на

$$\frac{d^2}{dx^2} V(x) = \frac{x}{\ell} \quad \rightarrow V(x) = \frac{x^3}{6\ell} + A(x) + B$$

$$V(0) = 0 \quad \rightarrow B = 0$$

$$V(\ell) = 0 \quad \rightarrow \frac{\ell^{\cancel{3}\,2}}{6\cancel{\ell}} + A\ell = 0 \quad \rightarrow A = -\frac{\ell}{6}$$

$$\Rightarrow V(x) = \frac{x^3}{6\ell} - \frac{\ell x}{6}$$

$$\Rightarrow u(x,t) = \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{-\alpha_n}{\alpha_n^2} \sin\left(\frac{n\pi}{\ell} x\right)} + \frac{xt}{\ell} = \underbrace{\frac{1}{6\ell}(x^3 - \ell^2 x)} + \frac{xt}{\ell}$$

Интерпретация – това е изменението на температурата на топлопроводяща пръчка. Левият край е допрян до термостат с температура 0. Десният край е допрян до тяло с променлива температура $= t$.

Случай (2) Хомогенизираща функция $\tilde{U} = \frac{x}{\ell}$

$V(x,t) = U(x,t) - \frac{x}{\ell}$, уравнение за V

$\partial_x^2 V - \partial_t V = 0 - 0 = 0$ няма "нов източник"

Ново начално условие

$$V(x,0) = U(x,0) - \frac{x}{\ell}\Big|_{t=0} = -\frac{x}{\ell}$$

Гранични условия – хомогенни

$$V(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} T_n(t)\sin(\alpha_n x)$$

$$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \left(-\dot{T}_n(t) - \alpha_n^2 T_n(t)\right)\sin(\alpha_n x) = 0$$

$$\Rightarrow \forall n=1,2,3, \to \quad \dot{T}_n(t) + \alpha_n^2 T_n(t) = 0$$

$\Rightarrow T_n(t) = A_n e^{-\alpha_n^2 t}$ – общо решение

$$V(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n e^{-\alpha_n^2 t}\sin(\alpha_n x)$$

Начално условие

$$V(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cdot \sin(\alpha_n x) = -\frac{x}{\ell}$$

$$A_n = -\frac{2}{\ell}\int_0^\ell \frac{x}{\ell}\sin\left(\frac{n\pi}{\ell}x\right)dx$$

$$\Rightarrow U(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n e^{-\left(\frac{n\pi}{\ell}\right)^2 t}\sin\left(\frac{n\pi}{\ell}x\right) + \frac{x}{\ell}$$

Асимптотично поведение при $t \to \infty$

$$U = \frac{x}{\ell}$$

Интерпретация: Топлопроводящата пръчка в началото има температура 0. В момента $t=0$ левият край се допира до термостат с температура 0 а десният до термостат с температура 1. След време равновесната температура се изменя линейно от нула до единица при $x = \ell$.

Случай 3

Хомогенизираща функция : $\tilde{u}(x,t) = 1$

$V(x,t) = u(x,t) - 1$; За $V(x,t)$ получаваме

$\partial_x^2 V(x,t) - \partial_t V = 0$

$V(x,0) = u(x,0) - 1 = u_0(x) - 1$; ново нач. условие

$-\partial_x V(0,t) = 0$

$V(l,t) = u(l,t) - 1 = 0$

При разделяне на променливите : $V(x,t) = X(x)\,T(t)$
възниква задача на Щурм - Лиувил:

$\ddot{X}(x) = \lambda X(x), \quad x \in (0,l) \; ; \; \dot{X}(0) = 0, \; X(l) = 0$

$\lambda_n = -\alpha_n^2, \quad \alpha_n = \frac{(2n+1)}{2l}\pi, \qquad n = 0,1,2,\dots$

$X_n(x) = \cos\left(\frac{2n+1}{2l}\cdot\pi x\right)$

Търсим решение във вида

$V(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} T_n(t)\cos(\alpha_n x)$; заместваме в уравнението

$\sum_{n=0}^{\infty}\left(-\dot{T}_n(t) - \alpha_n^2 T_n(t)\right)\cos(\alpha_n x) = 0$

$\Rightarrow \dot{T}_n(t) + \alpha_n^2 T_n(t) = 0 \to T_n(t) = A_n e^{-\alpha_n^2 t}$

$\Rightarrow V(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n e^{-\alpha_n^2 t}\cos(\alpha_n x)$

Начално условие за $V(x,t)$:

$V(x,0) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n\cos(\alpha_n x) = u_0(x) - 1$

$u_0(x) = \sum_{n=0}^{\infty} B_n\cos\left(\frac{2n+1}{2l}\pi x\right)$; $B_n = \frac{2}{l}\int_0^a u_0(x)\cos\left(\frac{2n+1}{2l}\pi x\right)dx$

$1 = \sum_{n=0}^{\infty} C_n\cos\left(\frac{2n+1}{2l}\pi x\right)$; $C_n = \frac{2}{l}\int_0^a 1\cdot\cos\left(\frac{2n+1}{2l}\pi x\right)dx$

$= \frac{2}{l}\cdot\frac{2l}{(2n+1)\pi}\sin\left(\left(\frac{\pi}{2} + n\pi\right)\frac{x}{l}\right)\Big|_{x=0}^{l} = \frac{4\cdot(-1)^n}{(2n+1)\pi} = C_n$

$\Rightarrow A_n = B_n - C_n \Rightarrow V(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty}(B_n - C_n)e^{-\alpha_n^2 t}\cos(\alpha_n x)$

$u(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty}(B_n - C_n)e^{-\alpha_n^2 t}\cdot\cos(\alpha_n x) + 1, \qquad \alpha_n = \frac{2n+1}{2l}\pi$

асимптотично поведение $u(x,t) = 1$.

Хомогенизиращи функции

N - N : $-\partial_x u(0,t) = \mu_1(t)$, $\partial_x u(l,t) = \mu_2 t$

$$\tilde{u}(x,t) = -x\mu_1(t) + \frac{x^2}{2l}(\mu_2(t) + \mu_1(t))$$

D - N : $u(0,t) = \mu_1(t)$, $\partial_x u(l t) = \mu_2(t)$

$$\tilde{u}(x,t) = \mu_1(t) + x \cdot \mu_2(t)$$

N - D : $-\partial_x u(0,t) = \mu_1(t)$, $u(l,t) = \mu_2(t)$

$$\tilde{u}(x,t) = (l-x)\mu_1(t) + \mu_2(t)$$

Вълново уравнение

Задача

Намерете решение $u = u(x,t)$ на уравнението

$\partial_x^2 u - \frac{1}{2}\partial_t^2 u - 3\partial_t u = 0$, в областта: $x \in (0,\pi)$, $t \in (0,\infty)$

удовлетворяващо допълнителните условия:

$u(x,0) = \cos(2x) + \cos(3x)$

$\partial_t u(x,0) = 0$

$-\partial_x u(0,t) = 0 = \partial_x u(\pi,t)$

Решение

Задачата описва трептене на свободна струна (без източник), със свободни краища в среда с триене.

Диференциалният оператор допуска разделяне на променливите : $u(x,t) = X(x) \cdot T(t)$

За $X(x)$ се получава задачата на Щурм-Лиувил :

$\ddot{X}(x) = X(x)$, $x \in (0,\pi)$, $\dot{X}(x) = 0 = \dot{X}(\pi)$

$\lambda_n = -n^2$; $X_n = \cos(nx)$, $n = 0,1,2,3,\dots$

$(\alpha_n = \frac{n\pi}{\pi} = n)$

Търсим решението във вида

$$u(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} T_n(t) \cdot \cos(nx)$$. Заместваме в уравнението

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(-\frac{1}{2}\ddot{T}_n(t) - 3\dot{T}_n(t) - n^2 T_n(t)\right) \cdot \cos(nx) = 0$$

$$\Rightarrow \quad \ddot{T}_n(t) + 6\dot{T}_n(t) + 2n^2 T_n(t) = 0, \quad n = 0, 1, 2, 3, \ldots$$

$$T_n = e^{\varkappa t} \longrightarrow \varkappa^2 + 6\varkappa + 2n^2 = 0 \Rightarrow \varkappa_{n,1,2} = -3 \pm \sqrt{9-2n^2}$$

$$u(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(A_n e^{(-3+\sqrt{9-2n^2})t} + B_n e^{(-3-\sqrt{9-2n^2})t}\right) \cos(nx)$$

Характерът на решението се променя!

при $n = 0, 1, 2$ – апериодично затихване

при $n = 3, 4, 5, \ldots$ – периодично затихване

Затова е удобно да запишем:

$$u(x,t) = \sum_{n=0}^{2} \left[A_n e^{(-3+\sqrt{9-2n^2})t} + B_n e^{(-3-\sqrt{9-2n^2})t}\right] \cos(nx) +$$

$$+ \sum_{n=3}^{\infty} \left[A_n e^{-3t} \cos(\sqrt{2n^2-9} \cdot t) + B_n e^{-3t} \sin(\sqrt{2n^2-9} \cdot t)\right] \cos(nx)$$

Константите A_n и B_n се определят от началните условие

$$\begin{cases} u(x,0) = \cos(2x) + \cos(3x) \\ \partial_t u(x,0) = 0 \end{cases}$$

$$u(x,0) = \sum_{n=0}^{2} (A_n + B_n) \cos(nx) + \sum_{n=3}^{\infty} A_n \cdot \cos(nx) =$$

$$= \cos(2x) + \cos(3x)$$

$$\partial_t u(x,0) = \sum_{n=0}^{2} \left[(-3+\sqrt{9-2n^2}) A_n + (-3-\sqrt{9-2n^2}) B_n\right] \cos(nx) +$$

$$+ \sum_{n=3}^{\infty} \left[-3A_n + \sqrt{2n^2-9} \cdot B_n\right] \cos(nx) = 0$$

$\Rightarrow A_n = 0 = B_n$ при $n \neq 2, 3$. Само константите A_n, B_n с номера 2, 3 са различни от нула. За тях получаваме:

$$\left|\begin{array}{l} A_2 + B_2 = 1 \\ -2\cdot A_2 - 4B_2 = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left|\begin{array}{l} A_2 + B_2 = 1 \\ A_2 + 2B_2 = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left|\begin{array}{l} A_2 = 2 \\ B_2 = -1 \end{array}\right.$$

$$\left|\begin{array}{l} A_3 = 1 \\ -3A_3 + 3B_3 = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left|\begin{array}{l} A_3 = 1 \\ B_3 = 1 \end{array}\right. \qquad \Rightarrow$$

$$u(x,t) = \left(2e^{-2t} - e^{-4t}\right)\cos(2x) + e^{-3t}\left(\cos(3t) + \sin(3t)\right)\cos(3x)$$

Обща схема

Задача

Да се намери решение $u = u(x,t)$ на уравнението

$$\partial_x^2 u - a\,\partial_t^2 u - b\,\partial_t u - cu = -d(x,t)$$

в областта: $x \in (0, l)$, $t \in (0, \infty)$

удовлетворяващо допълнителните условия:

$$\left|\begin{array}{l} u(x,0) = u_0(x) \\ \partial_t u(x,0) = v_0(x) \end{array}\right\} \text{ начални условия}$$

$$\left|\begin{array}{l} u(0,t) = 0 \\ u(l,t) = 0 \end{array}\right\} \text{ или коя да е друга хомогенна гранична задача}$$

Решение

$a > 0$ за да бъде хиперболично

$b \geq 0$ съпротивлението е срещу скоростта

$c \geq 0$ еластична сила на привличане

Диференциалният оператор допуска разделяне на променливите: $u(x,t) = X(x)\cdot T(t)$

За $X(x)$ възниква задача на Щурм-Лиувил.

$$\ddot{X}(x) = \lambda X(x), \quad x \in (0, l), \quad X(0) = 0 = X(l)$$

$$\lambda_n = -\alpha_n^2, \quad \alpha_n = \frac{n\pi}{l}, \quad X_n(x) = \sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right), \quad n = 1,2,3,\dots$$

(При друга хомогенна гранична задача ще имаме други соб. стойности и собствени функции)

Търсим решението във вида:

$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} T_n(t)\sin(\alpha_n x)$, заместваме в уравнението.

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(-a\ddot{T}_n(t) - b\dot{T}_n(t) - c\,T_n(t) - \alpha_n^2 T_n(t)\right)\sin(\alpha_n x) =$$

$$= -d(x,t) = -\sum_{n=1}^{\infty} d_n(t)\sin(\alpha_n x) .$$

$$d_n(t) = \frac{2}{l}\int_0^l d(x,t)\sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right)dx$$

$$\Rightarrow \ddot{T}_n(t) + \frac{b}{a}\dot{T}_n(t) + \frac{1}{a}(\alpha_n^2 + c)T_n = \frac{1}{a}d_n(t) \quad , n = 1,2,3,$$

Общо решение на хомогенното уравнение

$$A_n e^{\varkappa_{n,1} t} + B_n e^{\varkappa_{n,2} t} \quad ; \quad \varkappa_n^2 + \frac{b}{a}\varkappa_n + \frac{1}{a}(\alpha_n^2 + c) = 0$$

Частно решение на нехомогенното уравнение

Нека $S_n(t)$ е решение на хомогенното уравнение, такова, че $S(0) = 0$, $\dot{S}(0) = 1$, тогава

$\int_0^t S(t-\tau)\frac{1}{a}d_n(\tau)\,d\tau$ е частно решение $\Rightarrow$

$$T_n(t) = A_n e^{\varkappa_{n,1} t} + B_n e^{\varkappa_{n,2} t} + \int_0^t S_n(t-\tau)\frac{1}{a}d_n(\tau)\,d\tau$$

Общо решение на нехомогенното уравнение.

Избраните знаци на "b" и "c" изключват нефизични решения. Възможно е за някое n_0 да имаме двоен корен. $\varkappa_{n,1} = \varkappa_{n,2} = \varkappa_{n_0}$. Тогава, само за n_0, трябва да напишем "изроденото" решение на хом. ур

$T_{n_0}(t) = A_n e^{\varkappa_{n_0}} + B_n . t . e^{\varkappa_{n_0} t}$. Подразбира се, че това се прави винаги когато се случи.

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty}\left(A_n e^{\varkappa_{n,1} t} + B_n e^{\varkappa_{n,2} t} + \int_0^t S_n(t-\tau)\frac{1}{a} d_n(\tau)\, d\tau\right)\sin(\alpha_n x)$$

Константите A_n и B_n се определят от началните условия

$$u(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty}(A_n + B_n)\sin(\alpha_n x) = u_0(x) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n \sin(\alpha_n x)$$

$$\partial_t u(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty}(\varkappa_{n,1} A_n + \varkappa_{n,2} B_n)\sin(\alpha_n x) = v_0(x) = \sum_{n=1}^{\infty} v_n \sin(\alpha_n x)$$

$$u_n = \frac{2}{l}\int_0^l u_0(x)\sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right)dx\ ; \quad v_n = \frac{2}{l}\int_0^l v_0(x)\sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right)dx$$

$$\Rightarrow \left|\begin{aligned} A_n + B_n &= u_n \\ \varkappa_{n,1} A_n + \varkappa_{n,2} B_n &= v_n \end{aligned}\right. \quad , n = 1, 2, 3 \ldots$$

Коментар

Ако граничните условия са нехомогенни, те се хомогенизират с подходяща коригираща функция.

Примерно, същата задача, но с гранични условия

$u(0,t) = \mu_1(t)$, $u(l,t) = \mu_2(t)$

Намираме функция $\tilde{u}(x,t)$ удовлетворяваща само граничните условия.

$\tilde{u}(0,t) = \mu_1(t)$, $\tilde{u}(l,t) = \mu_2(t)$.

Полагаме $V(x,t) = u(x,t) - \tilde{u}(x,t)$

функцията $V(x,t)$ удовлетворява уравнението:

$$\partial_x^2 V - a\partial_t^2 V - b\partial_t V - cV = -d(x,t) - (\partial_x^2 - a\partial_t^2 - b\partial_t - c).V$$

и началните условия

$$\left|\begin{aligned} V(x,0) &= u_0(x) - \tilde{u}(x,0) \\ \partial_t V(x,0) &= v_0(x) - \partial_t\tilde{u}(x,0) \end{aligned}\right. \ ;$$

} и по построение хомогенни гранични условия.

Намираме $V(x,t)$ по описаната схема

$\Rightarrow$ $u(x,t) = V(x,t) + \tilde{u}(x,t)$

<u>Задача</u>

Намерете решение $u = u(x,t)$ на уравнението
$\partial_x^2 u - \partial_t^2 u = -1$, в областта: $x \in (0,\pi)$, $t \in (0,\infty)$
удовлетворяващо допълнителните условия

$$\left| \begin{array}{l} u(x,0) = 0 \\ \partial_t u(x,0) = 0 \end{array} \right\} \text{ начални условия}$$

$$① \left| \begin{array}{l} u(0,t) = 0 \\ u(\pi,t) = 0 \end{array} \right. \quad ; \quad ② \left| \begin{array}{l} -\partial_x u(0,t) = 0 \\ \partial_x u(\pi,t) = 0 \end{array} \right.$$

<u>Решение</u>

① Задачата описва тежка хомогенна струна с фиксирани краища. Пусната е от състояние на покой, в хоризонтално положение, да „провисва"

При разделяне на променливите $u(x,t) = X(x).T(t)$ за X възниква задача на Щурм-Лиувил

$\ddot{X}(x) = \lambda X(x)$, $x \in (0,\pi)$, $X(0) = 0 = X(\pi)$

$\lambda_n = -n^2$, $X_n = \sin(nx)$, $n = 1,2,3,\ldots$

Търсим решението във вида

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} T_n(x) \sin(nx) \quad \Rightarrow$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(-\ddot{T}_n(t) - n^2 T_n(t)\right) \sin(nx) = -1 = -\sum d_n \cdot \sin(nx)$$

$$\Rightarrow \ddot{T}_n(t) + n^2 T_n(t) = d_n \quad , n = 1,2,3,\ldots$$

Общо решение : $T_n(t) = A_n . \cos(nt) + B_n \sin(nt) + \frac{d_n}{n^2}$

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(A_n \cos(nt) + B_n \sin(nt) + \frac{d_n}{n^2}\right) \sin(nt)$$

Константите A_n и B_n се определят от началните условия.

$$\left| \begin{array}{l} u(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(A_n + \frac{\alpha_n}{2}\right) \sin(nx) = 0 \\ \partial_t u(x,0) = \sum_{n=1}^{n} n.B_n \sin(nx) = 0 \end{array} \right\} \quad \begin{array}{l} A_n = -\frac{\alpha_n}{n^2} \\ B_n = 0 \end{array}$$

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha_n}{n^2}\left(1-\cos(nt)\right)\sin(nx)$$

$$\alpha_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \sin(nx)\,dx = \frac{2}{n\pi}\left(1-(-1)^n\right) = \begin{cases} 0 & , n = 2k \\ \frac{4}{(2k+1)\pi} & , n = 2k+1 \\ & k = 0,1,2. \end{cases}$$

$$u(x,t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{4}{(2k+1)^3\pi}\left(1-\cos((2k+1)t)\right)\sin((2k+1).x)$$

---

(2) Задачата описва тежка хомогенна струна със свободни краища. Пусната е от състояние на покой, в хоризонтално положение, да провисва

В този случай, при разделяне на променливите,

$u(x,t) = X(x).T(t)$ за $X(x)$ възниква задача на Щурм-Лиувил.

$$\ddot{X}(x) = \lambda X(x), \quad x \in (0,\pi), \quad \dot{X}(0) = 0 = \dot{X}(\pi)$$

$$\lambda_n = -n^2, \quad X_n(x) = \cos(nx), \quad n = 0,1,2,3,\dots$$

Търсим решение от вида

$$u(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} T_n(t)\cos(nx)$$ заместваме в уравнението

$$\Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} \left(-\ddot{T}_n(t) - n^2 T_n(t)\right)\cos(nx) = -1 = -1.\cos(0.x)$$

$$n=0 \to \ddot{T}_0(t) = 1 \longrightarrow T_0 = \frac{1}{2}t^2 + A_0 t + B_0$$

$$n=1,2,\dots \to \ddot{T}_n(t) + n^2 T_n(t) \to T_n(t) = A_n\cos(nt) + B_n\sin(nt)$$

$$\Rightarrow u(x,t) = \left(\frac{1}{2}t^2 + A_0 t + B_0\right).1 + \sum_{n=1}^{\infty}\left(A_n\cos(nt) + B_n\sin(nt)\right)\cos(nx)$$

Начални условия:

$$u(x,0) = B_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos(nx) = 0 \;; \Rightarrow B_0 = 0, \quad A_n = 0, \; n = 1,2,3,\dots$$

$$\partial_t u(x,0) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} n . B_n . \cos(nx) = 0 ; \Rightarrow A_0 = 0, \quad B_n = 0, \; n = 1,2,3,\dots$$

$$\Rightarrow \quad u(x,t) = \frac{1}{2} t^2$$

Струната пада равноускорително, оставайки хоризонтална и права

Задача

Намерете решение $u = u(x,t)$ на уравнението

$\partial_x^2 u - \partial_t^2 u - \partial_t u = -1$, в областта: $x \in (0,\pi)$, $t \in (0,+\infty)$

удовлетворяващо допълнителните условия

$$\left|\begin{array}{l} u(x,0) = 0 \\ \partial_t u(x,0) = 0 \end{array}\right. ; \qquad \left|\begin{array}{l} u(0,t) = 0 \\ u(\pi,t) = 0 \end{array}\right.$$

Решение

Задачата описва тежка хомогенна струна с фиксирани краища във вискозна среда. Пусната е от състояние на покой и хоризонтално положение да провисва.

Използвайки предишната задача, решението се търси във вида

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} T_n(t) \sin(nx)$$, заместваме в уравнението.

$$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \left(-\ddot{T}_n(t) - \dot{T}_n(t) - n^2 T_n \right) \sin(nx) = -1 = -\sum d_n \sin(nx)$$

$$\Rightarrow \ddot{T}_n(t) + \dot{T}_n(t) + n^2 T_n(t) = d_n$$

$$\kappa^2 + \kappa + n^2 = 0 \;\rightarrow\; \kappa = -\frac{1}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{1-4n^2} \quad , n = 1,2,3,\dots$$

$$T_n(t) = e^{-\frac{t}{2}}\left(A_n \cos\left(\frac{\sqrt{4n^2-1}}{2}t\right) + B_n \sin\left(\frac{\sqrt{4n^2-1}}{2}t\right)\right) + \frac{d_n}{n^2}$$

общо решение на нехомогенното уравнение

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty}\left(e^{-\frac{t}{2}}\cdot\left(A_n \cos\left(\frac{\sqrt{4n^2-1}}{2}\cdot t\right) + B_n \sin\left(\frac{\sqrt{4n^2-1}}{2}t\right)\right) + \frac{d_n}{n^2}\right)\sin(nx)$$

. Начални условия

$$u(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty}\left(A_n + \frac{d_n}{n^2}\right)\sin(nx) = 0$$

$$\partial_t u(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty}\left(-\frac{1}{2}A_n + \frac{\sqrt{4n^2-1}}{2}B_n\right)\sin(nx) = 0$$

$$\left|\begin{array}{l} A_n + \dfrac{d_n}{n^2} = 0 \\ -A_n + \sqrt{4n^2-1}\,.B_n = 0 \end{array}\right. \Bigg\} \quad \left|\begin{array}{l} A = -\dfrac{d_n}{n^2} \\ B_n = -\dfrac{d_n}{n^2\sqrt{4n^2-1}} \end{array}\right.$$

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{d_n}{n^2}\left(1 - e^{-\frac{t}{2}}\cos\left(\frac{\sqrt{4n^2-1}}{2}t\right) - \frac{e^{-\frac{t}{2}}}{\sqrt{4n^2-1}}\sin\left(\frac{\sqrt{4n^2-1}}{2}t\right)\right)\right]\sin(nx)$$

$$d_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\sin(nx)\,dx = \frac{2}{n\pi}\left(1-(-1)^n\right) = \begin{cases} 0 & , n = 2k \\ \dfrac{4}{(2k+1)\pi} & , n = 2k+1 \end{cases}$$

$k = 0, 1, 2, \ldots$

При голямо t -> статично провисване

$$\lim_{t\to+\infty} u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{d_n}{n^2}\sin(nx) = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{4}{(2k+1)^3\pi}\sin((2k+1)x)$$

Статичното провисване удовлетворява уравнението

$$\frac{d^2}{dx^2}u(x) = -1 \; ; \Rightarrow u(x) = -\frac{1}{2}t^2 + At + B \; ; \quad \left|\begin{array}{l} u(0) = 0 \to B = 0 \\ u(\pi) = 0 \to -\frac{1}{2}\pi^2 + A\pi = 0 \end{array}\right.$$

$$\Rightarrow A = \frac{1}{2}\pi \Rightarrow u(x) = -\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}\pi x = \frac{1}{2}x(\pi - x)$$

$$\Rightarrow u(x) = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{4}{(2k+1)^3\pi}\sin((2k+1)x) = \frac{1}{2}x(\pi - x)$$

<u>Задача</u> (17.06.1999) Параболично у-е

Намерете решение $u = u(x,t)$ на уравнението

$\partial_x^2 u - \partial_t u = -2$, в областта $x \in (0,\pi)$, $t \in (0,+\infty)$

удовлетворяващо допълнителните условия

$u(x,0) = \cos(3x) - \cos(x) + 1$

$-\partial_x u(0,t) = 0$, $\partial_x u(\pi,t) = 0$

<u>Решение</u>

$u = X(x)\,T(t) \longrightarrow \ddot{X}(x) = \lambda X(x);\ x \in (0,\pi);\ \dot{X}(0) = 0 = \dot{X}(\pi)$

$\lambda_n = -n^2$, $X_n = \cos(nx)$, $n = 0,1,2,3,\dots$

$$u(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} T_n(t)\cos(nx)$$

$$\Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} \left(-\dot{T}_n - n^2 T_n\right)\cos(nx) = -2 = -2.\cos(0.x)$$

$n = 0 \to -\dot{T}_0(t) = -2 \Rightarrow T_0(t) = +2t - A_0$

$n > 0 \to \dot{T}_n + n^2 T_n = 0 \Rightarrow T_n(t) = A_n e^{-n^2 t}$

$$u(x,t) = (+2t + A_0) + \sum_{n=1}^{\infty} A_n e^{-n^2 t}\cos(nx)$$

$$u(x,0) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n.\cos(nx) = 1 - \cos x + \cos(3x)$$

$\Rightarrow A_0 = 1$, $A_1 = -1$, $A_3 = 1$

$$u(x,t) = +2t + 1 - e^{-t}.\cos x + e^{-9t}\cos(3x)$$

Параболично у.е

Задача (01.09.1999)

Намерете решение $u = u(x,t)$ на уравнението $\partial_x^2 u - \partial_t u = 0$, в областта: $x \in (0,a)$, $t \in (0,\infty)$ удовлетворяващо допълнителните условия

$$u(x,0) = 0$$

$$-\partial_x u(0,t) = 0 \quad , \quad u(a,t) = q$$

Решение

Хомогенизираме граничните условия

$u_0(x,t) = q \;;\; -\partial_x u_0(x) = 0 \;,\; u_0(a,t) = q$

$$V(x,t) = u(x,t) - q \;\Rightarrow\; \begin{cases} \partial_x^2 V - \partial_t V = 0 \\ V(x,0) = -q \\ -\partial_x V(0,t) = 0 = V(a,t) \end{cases}$$

$\ddot{X}(x) = \lambda X(x)$

$x \in (0,a)$; $\dot{X}(0) = 0$, $X(a) = 0$

$$\lambda_n = -\alpha_n^2, \quad \alpha_n = \frac{2n+1}{2a}\pi, \qquad X_n(x) = \cos(\alpha_n x), \quad n = 0,1,2..$$

$$V(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} T_n(t)\cos(\alpha_n x) \;\Rightarrow\; \dot{T}_n(t) + \alpha_n^2 T_n(t) = 0$$

$$\Rightarrow T_n(t) = A_n e^{-\alpha_n^2 t} \;\Rightarrow\; V(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n e^{-\alpha_n^2 t}\cos(\alpha_n x)$$

$$V(x,0) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n . 1 . \cos\left(\frac{2n+1}{2a}\pi x\right) = -q$$

$$A_n = \frac{2}{a}\int_0^a (-q)\cdot\cos\left(\frac{2n+1}{2a}\pi x\right)dx = \frac{4q(-1)^{n+1}}{(2n+1)\pi}$$

$$\Rightarrow u(x,t) = q + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{4q(-1)^{n+1}}{(2n+1)\pi} e^{-\left(\frac{(2n+1)\pi}{2a}\right)^2 \cdot t} \cos\left(\frac{(2n+1)\pi}{2a}\cdot x\right)$$

$$\left(\int_0^a \cos\left(\frac{2n+1}{2a}\pi x\right)\cos\left(\frac{2n'+1}{2a}\pi x\right)dx = \frac{a}{2}\delta_{nn'}\right.$$

асимптотично поведение $\quad u(x,t) = u(x) = q$

Задача (05.09.2000)

Намерете решение $u = u(x,t)$ на уравнението

$$\partial_x^2 u - \partial_t u = -3 \quad , \quad x \in (0,\pi), \ t \in (0,+\infty)$$

удовлетворяващо допълнителните условия

$$u(x,0) = 1 + \cos(2x)$$

$$-\partial_x u(0,t) = 0 = \partial_x u(\pi,t)$$

Решение

$$u = X(x)T(t) \rightarrow \ddot{X}(x) = \lambda X, \ x \in (0,\pi), \ \dot{X}(0) = 0 = \dot{X}(\pi)$$

$$\lambda_n = n^2, \ X_n(x) = \cos(nx), \quad n = 0,1,2,3,\ldots$$

$$u(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} T_n(t)\cos(nx)$$

$$\Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty}\left(-\dot{T}_n(t) - n^2 T_n(t)\right)\cos(nx) = -3 = -3.\cos(0.x)$$

$$n=0 \Rightarrow -\dot{T}_0(t) = -3 \rightarrow T_0 = 3t + A_0$$

$$n>0 \Rightarrow -\dot{T}_n(t) - n^2 T_n(t) = 0 \Rightarrow T_n = A_n e^{-n^2 t}$$

$$u(x,t) = 3t + A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n e^{-n^2 t}\cos(nx)$$

Начално условие

$$u(x,0) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n e^{-n^2 t}\cos(nx) = 1 + \cos(2x)$$

$A_0 = 1, \ A_2 = 1$ останалите са 0

$$u(x,t) = 3t + 1 + e^{-4t}\cos(2x)$$

Задача (26.06.2001)

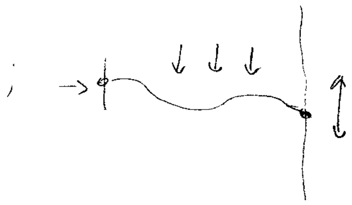
Намерете решение $u = u(x,t)$ на уравнението

$$\partial_x^2 u - \partial_t^2 u - \partial_t u = -\sin\left(\tfrac{3}{2}x\right), \quad x \in [0,\pi], \ t \in [0,+\infty)$$

удовлетворяващо допълнителните условия.

$$u(x,0) = 0, \quad \partial_t u(x,0) = 0$$

$$u(0,t) = 0, \quad \partial_x u(\pi,t) = 0$$



Решение

$u(x,t) = X(x)\,T(t) \Rightarrow \ddot{X}(x) = \lambda X, \ x \in [0,\pi], \ X(0) = 0 = \dot{X}(\pi)$

$\lambda_n = -\alpha_n^2, \quad \alpha_n = -\left(n+\tfrac{1}{2}\right)^2, \quad X_n = \sin\left(\tfrac{2n+1}{2}x\right), \quad n = 0,1,2,3,\dots$

$$u(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} T_n(t)\sin(\alpha_n x) \Rightarrow$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left(-\ddot{T}_n(t) - \dot{T}_n(t) - \alpha_n^2 T_n(t)\right)\sin\left(\tfrac{2n+1}{2}x\right) = -\sin\left(\tfrac{3}{2}x\right)$$

$n = 0 \to \ddot{T}_0 + \dot{T}_0 + \tfrac{1}{4}T_0 = 0 \to \varkappa^2 + \varkappa + \tfrac{1}{4} = 0 \to \varkappa = -\tfrac{1}{2}$

двоен корен $\to T_0 = A_0 e^{-\frac{1}{2}t} + B_0 t e^{-\frac{1}{2}t}$

$n = 1 \to \ddot{T}_1 + \dot{T}_1 + \tfrac{9}{4}T_1 = 1 \to \varkappa^2 + \varkappa + \tfrac{9}{4} = 0 \Rightarrow \varkappa = -\tfrac{1}{2} \pm i\sqrt{2}$

$T = const = \tfrac{4}{9}$, частно решение $\to T_1 = A_1 e^{-\frac{1}{2}t}\cos(\sqrt{2}t) + B_1 e^{-\frac{1}{2}t}\sin(\sqrt{2}t) + \tfrac{4}{9}$

$n = 2,3,4,\dots \to \ddot{T}_n + \dot{T}_n + \alpha_n^2 T_n = 0 \to \varkappa^2 + \varkappa + \alpha_n^2 = 0 \to \varkappa = -\tfrac{1}{2} \pm i\sqrt{\alpha_n^2 - \tfrac{1}{4}}$

$$T_n = A_n e^{-\frac{1}{2}t}\cos\left(\sqrt{\alpha_n^2 - \tfrac{1}{4}}\,t\right) + B_n e^{-\frac{1}{2}t}\sin\left(\sqrt{\alpha_n^2 - \tfrac{1}{4}}\,t\right)$$

$$u(x,t) = \left(A_0 e^{-\frac{1}{2}t} + B_0 t e^{-\frac{1}{2}t}\right)\sin\left(\tfrac{1}{2}x\right) + \left(e^{-\frac{1}{2}t}\left(A_1\cos(\sqrt{2}t) + B_1\sin(\sqrt{2}t)\right) + \tfrac{4}{9}\right)\sin\left(\tfrac{3}{2}x\right)$$

$$+ \sum_{n=2}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}t}\left(A_n\cos\left(\sqrt{\alpha_n^2 - \tfrac{1}{4}}\,t\right) + B_n\sin\left(\sqrt{\alpha_n^2 - \tfrac{1}{4}}\,t\right)\right)\sin(\alpha_n x)$$

$$u(x,0) = A_0\sin\left(\tfrac{1}{2}x\right) + \left(A_1 + \tfrac{4}{9}\right)\sin\left(\tfrac{3}{2}x\right) + \sum_{n=2}^{\infty} A_n\sin\left(\tfrac{2n+1}{2}x\right) = 0$$

$$\partial_t u(x,0) = \left(-\tfrac{1}{2}A_0 + B_0\right)\sin\left(\tfrac{1}{2}x\right) + \left(-\tfrac{1}{2}A_1 + \sqrt{2}B_1\right)\sin\left(\tfrac{3}{2}x\right) + \sum_{n=2}^{\infty}\left(-\tfrac{1}{2}A_n + \sqrt{\alpha_n^2 - \tfrac{1}{4}}\,B_n\right)\sin(\alpha_n x) = 0$$

$$\left|\begin{array}{l} A_0 = 0 \\ -\tfrac{1}{2}A_0 + B_0 = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left|\begin{array}{l} A_0 = 0 \\ B_0 = 0 \end{array}\right. ; \quad \left|\begin{array}{l} A_1 + \tfrac{4}{9} = 0 \\ -\tfrac{1}{2}A_1 + \sqrt{2}B_1 = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} A_1 = -\tfrac{4}{9} \\ B_1 = -\tfrac{\sqrt{2}}{9} \end{array} ; \quad \left|\begin{array}{l} A_n = 0 \\ B_n = 0 \end{array}\right.$$

$$\Rightarrow u(x,t) = \left[-\tfrac{4}{9}e^{-\frac{1}{2}t}\cos(\sqrt{2}t) - \tfrac{\sqrt{2}}{9}e^{-\frac{1}{2}t}\sin(\sqrt{2}t) + \tfrac{4}{9}\right]\cdot\sin\left(\tfrac{3}{2}x\right)$$

$$\lim_{t\to\infty} u(x,t) = \tfrac{4}{9}\sin\left(\tfrac{3}{2}x\right)$$

Задача (26.06.1998)

$$u = u(x,t)$$
$$\partial_x^2 u - \partial_t^2 u = -1 \quad ; \; x \in (0,\pi) \;, t \in (0,+\infty)$$
$$u(x,0) = \cos(2x), \quad \partial_t u(x,0) = \cos(3x) \qquad \text{– начални}$$
$$-\partial_x u(0,t) = 0 = \partial_x u(\pi,t) \qquad \text{– гранични}$$

Решение

$$u = X(x)T(t) \quad \to \quad \ddot{X}(x) = \lambda X(x); \; x \in (0,\pi), \; \dot{X}(0) = 0 = \dot{X}(\pi)$$
$$\lambda_n = -n^2, \quad X_n(x) = \cos(nx), \quad n = 0,1,2,3,\dots$$
$$u(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} T_n(t)\cos(nx)$$
$$\Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} \left(-\ddot{T}_n(t) - n^2 T_n(t)\right)\cos(nx) = -1$$
$$n=0 \to -\ddot{T}_0(t) = -1 \to T_0(n) = \frac{1}{2}t^2 + A_0 t + B_0$$
$$n>0 \to \ddot{T}_n + n^2 T_n = 0 \to T_n = A_n\cos(nt) + B_n\sin(nt)$$
$$u(x,t) = \left(\frac{1}{2}t^2 + A_0 t + B_0\right) + \sum_{n=1}^{\infty}\left(A_n\cos(nt) + B_n\sin(nt)\right)\cos(nx)$$
$$u(x,0) = B_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cdot \cos(nx) = \cos(2x)$$
$$\partial_t u(x,0) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} n \cdot B_n \cdot \cos(nx) = \cos(3x)$$
$$\Rightarrow A_0 = 0 \quad ; \quad A_2 = 1 \quad A_n = 0 \quad n = 1,3,4,5,\dots$$
$$B_0 = 0 \quad ; \quad B_3 = \frac{1}{3}, \quad B_n = 0 \quad n = 0,1,2,4,5,\dots$$

$$u(x,t) = \frac{1}{2}t^2 + \cos(2t)\cos(2x) + \frac{1}{3}\sin(3t)\cos(3x)$$

<u>Задача</u> (04.09.1997)

Намерете решение $u = u(x,t)$ на уравнението

$$\partial_x^2 u - \partial_t^2 u - 6\partial_t u - 4u = 0 \quad ; \quad x \in (0,\pi),\ t \in [0, +\infty)$$

удовлетворяващо допълнителните условия

$$u(x,0) = \sin x \quad , \quad \partial_t u(x,0) = 0$$

$$u(0,t) = 0 = u(\pi,t)$$

<u>Решение</u>

$$u = X(x)\,T(t) \to \ddot{X}(x) = \lambda X(x), \quad x \in (0,\pi), \quad X(0) = 0 = X(\pi)$$

$$\lambda_n = -n^2 \quad , X_n = \sin(nx), \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} T_n(t) \sin(nx)$$, заместваме в уравнението

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(-\ddot{T}_n(t) - 6\dot{T}_n(t) - 4T_n(t) - n^2 T_n(t)\right) \sin(nx) = 0$$

$$\Rightarrow \ddot{T}_n + 6\dot{T}_n + (4+n^2)T_n = 0 \to æ^2 + 6æ + (4+n^2) = 0$$

$$æ = -3 \pm \sqrt{9-4-n^2} = -3 \pm \sqrt{5-n^2}$$

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(A_n e^{(-3+\sqrt{5-n^2})t} + B_n e^{(-3-\sqrt{5-n^2})t}\right) \sin(nx)$$

$$u(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} (A_n + B_n) \sin(nx) = \sin x$$

$$\partial_t u(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(A_n(-3+\sqrt{5-n^2}) + B_n(-3+\sqrt{5-n^2})\right) \sin(nx) = 0$$

$$\Rightarrow A_n = 0 = B_n \quad , n = 2, 3, 4 \dots$$

$$n = 1 \Rightarrow : \left| \begin{array}{l} A_1 + B_1 = 1 \\ -A_1 - 5B_1 = 0 \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} B_1 = -\frac{1}{4} \\ A_1 = \frac{5}{4} \end{array}$$

$$\Rightarrow u(x,t) = \frac{1}{4}\left(5e^{-t} - e^{-5t}\right) \sin x$$

апериодично затихване на свободна струна с фиксирани краища във вискозна среда

Задача (09.09.2003)

Намерете решение $u = u(x,t)$ на уравнението
$\partial_x^2 u - \partial_t^2 u - 10\partial_t u = 0$, в областта: $x \in (0, \pi)$, $t \in [0, +\infty)$
удовлетворяващо началните условия
$u(x,0) = \sin(5x)$, $\partial_t u(x,0) = 2\sin(5x)$
$u(0,t) = 0 = u(\pi,t)$

Решение

$u(x,t) - X(x)T(t) \to \ddot{X}(x) = \lambda X(x)$, $x \in [0,\pi]$, $t \in [0,+\infty)$

$\lambda_n = -n^2$, $X_n(x) = \sin(nx)$, $n = 1,2,3,\dots$

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} T_n(t)\sin(nx)$$

$$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \left(-\ddot{T}_n(t) - 10\dot{T}_n(t) - n^2 T_n(t)\right)\sin(nx) = 0$$

$\ddot{T}_n(t) + 10\dot{T}_n(t) + n^2 T_n(t) = 0 \to æ^2 + 10æ + n^2 = 0$

$æ = -5 \pm \sqrt{25 - n^2}$, $n = 5$ двоен корен

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{4} \left(A_n e^{(-5+\sqrt{25-n^2})t} + B_n e^{(-5-\sqrt{25-n^2}t)}\right)\sin(nx)$$

$$+ (A_5 e^{-5t} + B_5 t e^{-5t})\sin(5x) + \dots$$

$$+ \sum_{n=6}^{\infty} e^{-5t}\left(A_n\cos(\sqrt{n^2-25}\,t) + B_n\sin(\sqrt{n^2-25}\,t)\right)\sin(nx)$$

$$\left.\begin{aligned} u(x,0) &= \sin(5x) \\ \partial_t u(x,0) &= 2\sin(5x) \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left|\begin{aligned} &A_5 = 1 \\ &-5A_5 + B_5 = 2 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left|\begin{aligned} &A_5 = 1 \\ &B_5 = 7 \end{aligned}\right.$$

останалите са нули

$$u(x,t) = e^{-5t}(1 + 7t)\sin(5x)$$

Задача (13.06.2002)

Намерете решение $u = u(x,t)$ на уравнението

$\partial_x^2 u - \partial_t^2 u - 8\partial_t u = 0$, в областта : $x \in [0,\pi]$, $t \in [0,+\infty)$

удовлетворяващо допълнителните условия:

$u(x,0) = 1 + \cos(5x)$, $\partial_t u(x,0) = 1 + \cos(4x)$

$\partial_x u(0,t) = 0$, $\partial_x u(\pi,t) = 0$

Решение

$u(x,t) = X(x)T(t) \Rightarrow \ddot{X}(x) = \lambda X(x)$, $x \in [0,\pi]$, $\dot{X}(0) = 0 = \dot{X}(\pi)$

$\lambda_n = -n^2$, $X_n = \cos(nx)$, $n = 0,1,2,3,\dots$

$$u(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} T_n(t)\cos(nx)$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left(-\ddot{T}_n(t) - 8\dot{T}_n(t) - n^2 T_n(t)\right)\cos(nx) = 0$$

$\ddot{T}_n(t) + 8\dot{T}_n(t) + n^2 T_n(t) = 0 \rightarrow \varkappa^2 - 8\varkappa + n^2 = 0 \rightarrow \varkappa_{1,2} = -4 \pm \sqrt{16-n^2}$

$$u(x,t) = \sum_{n=0}^{3}\left(A_n e^{(-4+\sqrt{16-n^2})t} + B_n e^{(-4-\sqrt{16-n^2})t}\right)\cos(nx) +$$

$$+ \left(A_4 e^{-4t} + B_4 t e^{-4t}\right)\cos(4x) + \sum_{n=5}^{\infty} e^{-4t}\left(A_n\cos(\sqrt{n^2-16}\,t) + B_n\sin(\sqrt{n^2-16}\,t)\right)\cos(nx)$$

$$u(x,0) = \sum_{n=0}^{3}(A_n + B_n)\cos(nx) + A_4\cdot\cos(4x) + \sum_{n=5}^{\infty} A_n\cos(nx) = 1 + \cos(5x)$$

$$\partial_t u(x,0) = \sum_{n=0}^{3}\left(A_n\cdot(-4+\sqrt{16-n^2}) + B_n(-4-\sqrt{16-n^2})\right)\cos(nx) + (-4A_4 + B_4)\cos(4x) +$$

$$+ \sum_{n=5}^{\infty}\left(-4A_n + \sqrt{n^2-16}\,B_n\right)\cos(nx) = 1 + \cos(4x)$$

$n=0$: $\left|\begin{array}{l} A_0 + B_0 = 1 \\ -8B_0 = 1 \end{array}\right\} \Rightarrow \left|\begin{array}{l} A_0 = \frac{9}{8} \\ B_0 = -\frac{1}{8} \end{array}\right.$ $n=4$: $\left|\begin{array}{l} A_4 = 0 \\ -4A_4 + B_4 = 1 \end{array}\right\} \Rightarrow \left|\begin{array}{l} A_4 = 0 \\ B_4 = 1 \end{array}\right.$

$n=5$: $\left|\begin{array}{l} A_5 = 1 \\ -4A_5 + 3B_5 = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left|\begin{array}{l} A_5 = 1 \\ B_5 = \frac{4}{3} \end{array}\right.$; останалите са 0

$$u(x,t) = \frac{9}{8} - \frac{1}{8}e^{-8t} + t e^{-4t}\cos(4x) + e^{-4t}\left(\cos(3t) + \frac{4}{3}\sin(3t)\right)$$

Задача (10.09.1995)

$u = u(x,t)$

$$\partial_x^2 u - \partial_t^2 u - 6\,\partial_t u - u = 0 \quad ; \quad x\in(0,\pi),\ t\in(0,\infty)$$

$$u(x,0) = \sin(2x), \quad \partial_t u(x,0) = \sin(3x)$$

$$u(0,t) = 0 = u(\pi,t)$$

Решение

$$u = X(x)\,T(t) \;\to\; \ddot{X}(t) = \lambda X(x),\ x\in(0,\pi),\ X(0)=0=X(\pi)$$

$$\lambda = -n^2,\quad X_n = \sin(nx),\quad n = 1,2,3,\dots$$

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} T_n(t)\sin(nx)$$

$$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty}\left(-\ddot{T}_n(t) - 6\dot{T}_n(t) - T_n(t) - n^2 T_n(t)\right)\sin(nx) = 0$$

$$\Rightarrow \ddot{T}_n(t) + 6\dot{T}_n(t) + (1+n^2)T_n = 0 \quad \Rightarrow \varkappa^2 + 6\varkappa + (1+n^2)\varkappa = 0$$

$$\varkappa_{1,2} = -3 \pm \sqrt{9-1-n^2} = -3\pm\sqrt{8-n^2}$$

$$n=1 \to \varkappa_1 = -3+\sqrt{7},\ \varkappa_2 = -3-\sqrt{7} \to T_1(t) = A_1 e^{(-3+\sqrt{7})t} + B_1 e^{(-3-\sqrt{7})t}$$

$$n=2 \to \varkappa_1 = -1,\ \varkappa_2 = -5 \to T_2(t) = A_2 e^{-t} + B_2 e^{-5t}$$

$$n=3 \to \varkappa_1 = -3+i\sqrt{n^2-8},\ \varkappa_2 = -3-i\sqrt{n^2-8} \to T_n(t) = e^{-3t}\left(A_n\cos(\sqrt{n^2-8}\cdot t) + B_n\sin(\sqrt{n^2-8}\cdot t)\right)$$

$$u(x,t) = \left(A_1 e^{(-3+\sqrt{7})t} + B_1 e^{(-3-\sqrt{7}t)}\right)\sin x + \left(A_2 e^{-t} + B_2 e^{-5t}\right)\sin(2x) +$$

$$+\sum_{n=3}^{\infty} e^{-3t}\left(A_n\cos(\sqrt{n^2-8}\cdot t) + B_n\sin(\sqrt{n^2-8}\,t)\right)\sin(nx)$$

$$u(x,0) = (A_1+B_1)\sin x + (A_2+B_2)\sin(2x) + \sum_{n=3}^{\infty} A_n\sin(nx) = \sin(2x)$$

$$\partial_t u(x,0) = \left(A_1\cdot(-3+\sqrt{7}) + B_1(-3-\sqrt{7})\right)\sin x + (-A_2 - 5B_2)\sin(2x) +$$

$$+\sum_{n=3}^{\infty}\left(-3A_n + \sqrt{n^2-8}\cdot B_n\right)\sin(nx) = \sin(2x)$$

$$\Rightarrow A_n = 0 = B_n,\ n = 1,3,4,5 \;;\; \begin{vmatrix} A_2+B_2 = 1 \\ -A_2-5B_2 = 1 \end{vmatrix} \;\; \begin{matrix} B_2 = -\frac{1}{2} \\ A_2 = \frac{3}{2} \end{matrix}$$

$$u(x,t) = \frac{1}{2}\left(3e^{-t} - e^{-5t}\right)\sin(2x)$$

$$e^{(\partial_1 u)} + x_1 \partial_1 u - \ln(\partial_2 u) - u = 0 \quad ; \quad u(t,0) = t + e$$

$$F = e^{p_1} + x_1 p_1 - \ln(p_2) - u \quad \Big| \; x_1(t) = t,\; x_2(t) = 0,\; u_0(t) = t + e \;;\; p_1(t) = 1,\; p_2(t) = 1$$

① Начални ивици

$$\left.\begin{cases} p_1 \cdot \dot{x}_1 + p_2 \cdot \dot{x}_2 = \dot{u}_0 \\ F(x_1(t), x_2(t), u_0(t), p_1, p_2) = 0 \end{cases}\right\} \Rightarrow \begin{cases} p_1 \cdot 1 + p_2 \cdot 0 = 1 & \to p_1 = 1 \\ e^{p_1} + t p_1 - \ln(p_2) - t - e = 0 & \to p_2 = 1 \end{cases}$$

② Хар. система

$$\begin{cases} \dot{x}_1(s) = e^{p_1} + x_1 & \to \dot{x}_1(s) = e^{\beta_1} + x_1 & \to x_1 = \alpha_1 e^{s} - e^{\beta_1} \\ \dot{x}_2(s) = -\dfrac{1}{p_2} & \to \dot{x}_2(s) = -\dfrac{1}{\beta_2} e^{-s} & \to x_2 = \dfrac{1}{\beta_2} e^{-s} + \alpha_2 \\ \dot{u} = p_1 e^{p_1} + p_1 x_1 - 1 & \to \dot{u}(s) = \beta_1 \cancel{e^{\beta_1}} + \beta_1(\alpha_1 e^{s} \cancel{- e^{\beta_1}}) - 1 & \\ \dot{p}_1 = -p_1 + p_1 = 0 & \to p_1 = \beta_1 & \\ \dot{p}_2 = p_2 & \to p_2 = \beta_2 e^{s} & \end{cases}$$

$$\dot{u}(s) = \alpha_1 \beta_1 e^{s} - s + \gamma$$

$$\left.\begin{cases} x_1 = \alpha_1 e^{s} - e^{\beta_1} \\ x_2 = \dfrac{1}{\beta_2} e^{-s} + \alpha_2 \\ u = \alpha_1 \beta_1 e^{s} - s + \gamma \\ p_1 = \beta_1 \\ p_2 = \beta_2 e^{s} \end{cases}\right\} \overset{s=0}{\Longrightarrow} \quad ③ \begin{cases} \alpha_1 - e^{\beta_1} = t & \to \alpha_1 = t + e \\ \dfrac{1}{\beta_2} + \alpha_2 = 0 & \to \alpha_2 = -1 \\ \alpha_1 \beta_1 + \gamma = t + e & \to \gamma = 0 \\ \beta_1 = 1 & \\ \beta_2 = 1 & \end{cases}$$

$$\left.\begin{cases} x_1 = (t+e) e^{s} - e \\ x_2 = e^{s} - 1 \\ u = (t+e) e^{s} - s \end{cases}\right\} \Rightarrow \quad ④ \begin{cases} x_1 = (t+e) e^{s} - e & \to (t+e) e^{s} = x_1 + e \\ x_2 = e^{s} - 1 & \to s = -\ln(1 + x_2) \end{cases}$$

⑤ $u(x_1, x_2) = x_1 + e - \ln(1 + x_2)$

$p, q, \xi_1, \xi_2, \xi_3, \eta_1, \eta_2, \eta_3, \rho_1, \rho_2, \sigma_1, \sigma_2$ параметри

Намерете общото решение на преопределената система ЧДУ.

$$\begin{cases} \partial_x^2 u - y.\partial_z^2 u = 0 \\ \partial_y^2 u = 0 \end{cases}$$

$u = u(x,y,z)$
Системата е от линейни ЧДУ.
Общото решение е векторно пространство

От второто уравнение

$$\partial_y^2 u(x,y,z) = 0 \quad \Rightarrow \quad \underline{u(x,y,z) = A(x,z).y + B(x,z)}$$

Заместваме в първото уравнение

$$\partial_x^2 (A.y + B) - y\,\partial_z^2 (A.y + B) = 0$$

$$(-\partial_z^2 A).y^2 + (\partial_x^2 A - \partial_z^2 B).y + \partial_x^2 B = 0$$

Тъждествено по (x,y,z)

Полином по y $\rightarrow$ коефициентите на полинома да са нули

$$\begin{cases} \partial_z^2 A(x,z) = 0 & \longrightarrow \quad A(x,z) = a(x).z + \alpha(x) \\ \partial_x^2 B(x,z) = 0 & \longrightarrow \quad B(x,z) = b(z).x + \beta(z) \\ \partial_x^2 A - \partial_z^2 B = 0 \end{cases}$$

заместваме

Трябва да се намери общото решение на тази система за A и B - отново преопределена

$$\partial_x^2 (a.z + \alpha) - \partial_z^2 (b.x + \beta) = 0$$

$$a''(x).z + \alpha''(x) - b''(z).x - \beta''(z) = 0 \qquad \leftarrow \Big| \frac{\partial}{\partial z}$$

$$a''(x) - b'''(z).x - \beta'''(z) = 0 \qquad \leftarrow \Big| \frac{\partial}{\partial x}$$

$$a'''(x) - b'''(z) = 0 \qquad \text{- разделени променливи}$$

$$a'''(x) = p = b'''(z) \qquad = const$$

$$\boxed{\begin{array}{l} a'''(x) = p \longrightarrow a(x) = \frac{1}{6} p x^3 + \xi_1 x^2 + \xi_2 x + \xi_3 \\ b'''(z) = p \longrightarrow b(z) = \frac{1}{6} p z^3 + \eta_1 z^2 + \eta_2 z + \eta_3 \\ p, \xi_1, \xi_2, \xi_3, \eta_1, \eta_2, \eta_3 \text{ - параметри} \end{array}}$$

$$p.\cancel{x.z} + \xi_1.z + \alpha''(x) - p.\cancel{z.x} - \eta_1.x - \beta''(z) = 0$$

$$\alpha''(x) - \eta_1.x - (\beta''(z) - \xi_1 z) = 0 \qquad \text{отново разделени променливи}$$

$$\boxed{\begin{array}{l} \alpha''(x) - \eta_1.x = q \rightarrow \alpha''(x) = \eta_1 x + q \rightarrow \alpha(x) = \frac{1}{6}\eta_1 x^3 + \frac{1}{2} q x^2 + \rho_1 x + \rho_2 \\ \beta''(z) - \xi_1 z = q \rightarrow \beta''(z) = \xi_1 z + q \rightarrow \beta(z) = \frac{1}{6}\xi_1 z^3 + \frac{1}{2} q z^2 + \sigma_1 z + \sigma_2 \end{array}}$$

Общото решение е:

$$u(x,y,z) = \left(\left(\tfrac{1}{6} p x^3 + \xi_1 x^2 + \xi_2 x + \xi_3\right).z + \tfrac{1}{6}\eta_1 x^3 + \tfrac{1}{2} q x^2 + \rho_1 x + \rho_2\right).y + \left(\tfrac{1}{6} p z^3 + \eta_1 z^2 + \eta_2 z + \eta_3\right).x + \tfrac{1}{6}\xi_1 z^3 + \tfrac{1}{2} q z^2 + \sigma_1 z + \sigma_2$$

✓ 1.) $\ln(x_2)\,\partial_1 u + x_2 \cdot u \cdot \partial_2 u - u = 0$; $u(t+1, e) = 1$

в области $x_2 > 0$

$u(x_1, x_2) = \ln(x_2)$ (04.09.1993)

✓ 2.) $\frac{1}{2}(\partial_1 u)^2 + \partial_2 u - \frac{1}{2}x_1^2 = 0$; $u(t,0) = 0$, $t \in (-\infty, +\infty)$

$u(x_1, x_2) = \frac{1}{2} x_1^2\, th(x_2)$ (14.06.1996

✓ 3.) $\frac{1}{2}(\partial_1 u)^2 + \partial_2 u - x_2 - u = 0$; $u(t,0) = 0$, $t \in (-\infty, +\infty)$

$u(x_1, x_2) = e^{x_2} - x_2 - 1$ (26.06.1998)

$u(t,0) = t \Rightarrow u(x_1, x_2) = \frac{1}{2} e^{2x_2} + (x_1 - e^{x_2} + \frac{3}{2})e^{x_2} - x_2 - 1$ (17.06.1999)

✓ 4.) $\ln(\partial_1 u) + x_2 \cdot \partial_1 u + \partial_2 u = 0$; $u(t,0) = t$, $t \in (-\infty, +\infty)$

$u(x_1, x_2) = x_1 - \frac{1}{2}x_2^2$ (01.09.1999)

✓ 5.) $\frac{1}{2}(\partial_1 u)^2 + \partial_2 u - \frac{1}{2}(x_1^2 + x_2^2) = 0$; $u(t,0) = 0$, $t \in (-\infty, +\infty)$

$u(x_1, x_2) = \frac{1}{4} x_1^2 \cdot th(x_2) + \frac{1}{6} x_2^3$ (23.06.2000)

$u(0,t) = \frac{1}{2}t^2$, $t \in (-\infty, +\infty) \Rightarrow u(x_1, x_2) = \frac{1}{6}x_1^3 + \frac{1}{2}x_2^2$

✓ 6.) $x_1 \cdot \partial_2 u + \partial_1 u \cdot \partial_2 u = 0$; $u(0,t) = e^t$

$u(x_1, x_2) = -\frac{1}{2}x_1^2 + e^{x_2}$ (26.06.2001)

✓ 7.) $e^{(\partial_1 u)} + \partial_2 u - x_1 - \frac{1}{2}x_2^2 = 0$, $u(t+1, 0) = 1$, $t \in (-\infty, +\infty)$

$u(x_1, x_2) = -e^{x_2} + \frac{1}{6}x_2^3 + x_1 \cdot x_2 + 2$ (13.06.1002)

✓ 8.) $e^{(\partial_1 u)} + x_2 . \partial_2 u - x_1 = 0$, $u(t+1, 1) = 0$, $t \in (-\infty, +\infty)$

$u(x_1, x_2) = x_1 \ln x_2 - x_2 + 1$ (23.06.2003)

✓ 9.) $e^{(\partial_1 u)} + x_1 . \partial_1 u - \ln(\partial_2 u) - u = 0$; $u(t, 0) = t + e$, $t \in (-\infty, +\infty)$

$u(x_1, x_2) = x_1 + e + \ln(x_2 + 1)$ (09.09.2003)

✓ 10.) $\ln(\partial_1 u) + x_2 \partial_2 u + u = 0$; $u(t+1, 1) = t$, $t \in (-\infty + \infty)$

$u(x_1, x_2) = \ln(x_1) + \frac{x_1}{x_2} - 1$ (08.07.2004)

✓ 11.) $\ln(\partial_1 u) + e^{(\partial_2 u)} - x_1 = 0$; $u(t+1, 1) = e^t$

$u(x_1, x_2) = e^{(x_1 - 1)}$ (09.09.2005)

✓ 12.) $x_1 . \partial_1 u + e^{(\partial_2 u)} - x_2 = 0$; $u(1, t+1) = 0$, $t \in (-\infty, +\infty)$

$u(x_1, x_2) = (x_2 - x_1) \ln x_1 + (\ln x_1 - 1) x_1 + 1$ (27.06.2001)

✓ 13.) $(\partial_1 u)^2 - \partial_2 u = 0$; $u(t, 1) = t^2$

$u(x_1, x_2) = \frac{x_1^2}{5 - 4 x_2}$ (08.06.1993)

Метод на обвивките (пълен интеграл)

√ 1.) $(\partial_1 u)^2 - \partial_2 u + 2 + e^{(x_2)} = 0$; $u(t,0) = t^2$

Пълен интеграл:

$\varphi(x_1, x_2, a, b) = a x_1 + (a^2+2)x_2 + b + e^{x_2}$

$u(x_1, x_2) = \dfrac{x_1^2}{1-4x_2} + 2x_2 + e^{x_2} - 1$ (11.06.1993)

√ 2.) $(\partial_1 u)^2 + c \cdot \partial_2 u - d \cdot x_2 = 0$; $u(t,0) = \frac{1}{2} t^2$

c, d - константи ;

Пълен интеграл: $\varphi(x_1, x_2, a, b) = a x_1 + \dfrac{d \cdot x_2^2}{2 \cdot c} + \dfrac{a^2}{c} x_2 + b$

$u(x_1, x_2) = \dfrac{c}{2} \dfrac{x_1}{2x_2 + c} + \dfrac{d\, x_2^2}{2c}$ (06.07.1994)

(може да се реши и със система на Лагранж - Шарпи)

√ 3.) $(\partial_1 u)^2 + x_1 \cdot \partial_1 u - x_2 \cdot \partial_2 u + 2u = 0$; $u(t,1) = 1$

Пълен интеграл: $\varphi(x_1, x_2, a, b) = a x_2^2 - \left(x_1 + \dfrac{b}{x_2}\right)^2$

$u(x_1, x_2) = x_2^2$ (13.07.1994)

√ 4.) $(\partial_1 u)^2 - (\partial_2 u)^2 - 4(x_1 \partial_1 u + x_2 \partial_2 u - u) = 0$

; $u(0, \frac{1}{2} t) = \frac{1}{4} t^2$

Пълен интеграл: $\varphi(x_1, x_2, a, b) = a x_1 - b x_2 - \frac{1}{4}(a^2 - b^2)$

$u(x_1, x_2) = 2\left(x_1 \mp \frac{1}{\sqrt{2}} x_2\right)^2$, задачата има две решения

(27.06.1996) (може и със система на Лагранж-Шарпи)